KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK
Jegyzet

SIMON L. PÉTER
Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapest, Alkalmazott Analízis Tanszék
e-mail: simonp@cs.elte.hu

2007. április 26.

1. A közönséges differenciálegyenlet fogalma, megoldásának létezése, egyértelműsége, függése a kezdeti feltételtől

1.1. Alapfogalmak

1. Definíció. Legyen $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ összefüggő nyílt halmaz (tartomány), $f : D \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvény $(t_0, p_0) \in D$. Ha az $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallumra, és az $x : I \to \mathbf{R}^n$ differenciálható függvényre teljesül, hogy

1. $(t, x(t)) \in D$ minden $t \in I$ esetén,
2. $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ minden $t \in I$ esetén,
3. $x(t_0) = p_0$

akkor az *x függvényt az I intervallumon az f jobboldalú explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlet (rendszer) megoldásának nevezzük az $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltétel mellett.*

1. Megjegyzés. A definícióban formailag csak az elsőrendű egyenlet fogalmát határoztuk meg, azonban egy $g : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény által meghatározott explicit n-ed rendű egyenlet

$$x^{(n)}(t) = g(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

az $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$,..., $x_n = x^{(n-1)}$ új függvények bevezetésével az alábbi elsőrendű rendszerré transzformálható:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= g(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))
\end{aligned}$$

Ezzel tehát az explicit n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet fogalma is definiálható.

A fenti definíció szerint egy differenciálegyenlet megadása egyenértékű egy $f : D \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvény megadásával, a differenciálegyenlet megoldása pedig az I intervallum és az x függvény megkeresését jelenti. Az 1. fejezetben az alábbi problémákat fogjuk vizsgálni:

- Az f függvénynek milyen feltételt kell kielégítenie ahhoz, hogy egyértelmű legyen a differenciálegyenlet megoldása
- Az f függvénynek milyen feltételt kell kielégítenie ahhoz, hogy a differenciálegyenletnek létezzen megoldása

- Mekkora az a legbővebb I intervallum, amelyen értelmezhető a megoldás
- Folytonosan függ-e a megoldás $x(t)$ értéke a kezdeti feltételtől és az f függvénytől
- Differenciálhatóan függ-e a megoldás $x(t)$ értéke a kezdeti feltételtől.

1.2. A megoldás egyértelműsége

1. Lemma. (kis Gronwall) *Legyen $u : [a,b] \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény. Ha $u'(t) \leq Ku(t)$ minden $t \in [a,b]$ esetén, akkor $u(t) \leq u(a)e^{K(t-a)}$ minden $t \in [a,b]$ esetén.*

1. Tétel. (egyértelműség) *Tegyük fel, hogy létezik olyan $L > 0$, hogy*

$$|f(t,p_1) - f(t,p_2)| \leq L|p_1 - p_2|,$$

minden $(t,p_1),(t,p_2) \in D$ esetén. Legyenek $x, y : I \to \mathbf{R}^n$ olyan megoldásai az $\dot{x}(t) = f(t,x(t))$ egyenletnek, melyekre létezik olyan $\tau \in I$, hogy $x(\tau) = y(\tau)$. Ekkor $x(t) = y(t)$, minden $t \in I$ esetén.

2. Lemma. (Gronwall) *Legyenek $u, b, c : [a,b] \to \mathbf{R}$ olyan függvények, melyekre u folytonos, $b \geq 0$ folytonos, c differenciálható. Ha minden $t \in [a,b]$-re*

$$u(t) \leq c(t) + \int_a^t u(s)b(s)ds,$$

akkor minden $t \in [a,b]$ esetén

$$u(t) \leq c(t) + \int_a^t b(s)c(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}ds.$$

2. Megjegyzés. Ha c is és b is állandó, akkor az előző lemmát kapjuk.

1.3. A megoldás létezése

2. Definíció. Legyen az $y : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ integrálható függvény integrálja:

$$\int_a^b y(t)dt := (\int_a^b y_1(t)dt, ..., \int_a^b y_n(t)dt)$$

3. Definíció. (Normák $\mathbf{R^n}$-ben) Legyen $v \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} \|v\|_p &= \left\{ \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1 \\ \|v\|_{\max} &= \max\{|v_i| : i = 1, ..., n\} \\ |v| &= \|v\|_2 \end{aligned}$$

1. Állítás. *Legyen $y : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ folytonos (integrálható) függvény . Ekkor*

$$\| \int_a^b y\|_p \leq \int_a^b \|y\|_p$$

Az alábbiakban az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t,x(t)) \qquad (1) \\ x(t_0) &= p_0 \qquad (2) \end{aligned}$$

kezdetiérték probléma megoldásának létezését vizsgáljuk.

3. Lemma. *A következő két állítás ekvivalens:*

1. *Az $x : I \to \mathbf{R}^n$ függvény differenciálható és megoldása az (1)-(2) kezdetiérték problémának.*
2. *Az $x : I \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonos és minden $t \in I$ esetén*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s + p_0.$$

2. Tétel. ("Banach fixponttételes")*: Legyenek $a, b \in \mathbf{R}_+$ olyanok, hogy $H := [t_0-a, t_0+a] \times \overline{B(p_0, b)} \subset D$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $L \in \mathbf{R}_+$, hogy*

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|,$$

minden $(t, p_1), (t, p_2) \in H$ esetén. Ekkor (1)-(2)-nek létezik egyetlen megoldása a $(t_0 - r, t_0 + r)$ intervallumon, ahol $r < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$, és $M = \max\{|f(t, p)| : (t, p) \in H\}$.

3. Tétel. (Picard-féle szukcesszív approximáció)*: Tegyük fel, hogy teljesülnek az előző tétel feltételei. Ekkor (1)-(2)-nek létezik egyetlen megoldása a $(t_0 - r, t_0 + r)$ intervallumon, ahol $r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.*

A fenti két tétel szerint a megoldás létezését biztosítja az, ha az f függvény a második változójában Lipschitz tulajdonságú. Ez a feltétel túl erős, valójában az egyértelműséget is garantálja. Az alábbi Peano-féle egzisztencia tétel szerint a megoldás létezéséhez elegendő az f folytonossága. Ezen tétel előkészítéseként kimondjuk az egyébként önmagában is érdekes Arzelá-Ascoli-féle tételt.

Legyen (M, ρ) kompakt metrikus tér. Jelölje $C(M, \mathbf{R}^n)$ az M teret az $\mathbf{R}^n$ térbe képező folytonos függvények Banach-terét a $\|g\| = \max\{|g(u)| : u \in M\}$ normával.

4. Definíció. Az $\mathcal{F} \subset C(M, \mathbf{R}^n)$ halmazt *ekvifolytonosnak (egyenlő mértékben folytonosnak)* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $g \in \mathcal{F}$, $u, v \in M$, $\rho(u, v) < \delta$ esetén $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$.

4. Lemma. (Arzelá-Ascoli) *Ha az $\mathcal{F} \subset C(M, \mathbf{R}^n)$ halmaz ekvifolytonos és korlátos, akkor $\mathcal{F}$ feltételesen sorozatkompakt, azaz minden sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.*

3. Megjegyzés. A fenti lemma megfordítása is igaz, így a $C(M, \mathbf{R}^n)$ térnek egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos, zárt és ekvifolytonos.

4. Tétel. (Peano) *Legyenek $a, b \in \mathbf{R}_+$ olyanok, hogy $H := [t_0-a, t_0+a] \times \overline{B(p_0, b)} \subset D$. Ekkor (1)-(2)-nek létezik megoldása a (t_0-r, t_0+r) intervallumon, ahol $r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, és $M = \max\{|f(t, p)| : (t, p) \in H\}$.*

1.4. Globális megoldás (a megoldás folytathatósága)

Az előző szakaszban feltételeket láttunk arra, hogy az (1)-(2) kezdetiérték feladatnak mikor létezik megoldása a t_0 pont egy környezetében. Most azt vizsgáljuk, hogy legfeljebb mekkora intervallumon lehet értelmezni a megoldást. A lehető legbővebb nyílt intervallumon értelmezett megoldást fogjuk *globális megoldásnak* nevezni, és erről megmutatjuk, hogy minden D halmazbeli kompakt részhalmazt elhagy.

5. Definíció. Az $f : D \to \mathbf{R}^n$ függvényt a *második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságúnak (MVLL)* nevezzük, ha minden $(t_0, p_0) \in D$ pontnak létezik $U \subset D$ környezete és létezik $L > 0$, hogy

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|,$$

minden $(t, p_1), (t, p_2) \in U$ esetén.

Az előző szakasz tételei szerint, ha az $f : D \to \mathbf{R}^n$ függvény folytonos és MVLL, akkor bármely $(t_0, p_0) \in D$ esetén az (1)-(2) kezdetiérték problémának létezik egyetlen megoldása a t_0 egy környezetében. Az alábbi lemma szerint a megoldás nem csak lokálisan egyértelmű.

5. Lemma. *Legyen* $f : D \to \mathbf{R}^n$ *folytonos és MVLL függvény, legyen* I *olyan nyílt intervallum, melyre* $t_0 \in I$. *Ha* $x, y : I \to \mathbf{R}^n$ *megoldásai az (1)-(2) kezdetiérték problémának, akkor* $x(t) = y(t)$ *minden* $t \in I$ *esetén.*

5. Tétel. (globális megoldás) *Legyen* f *olyan, mint az előző lemmában. Ekkor*

1. *Minden* $(t_0, p_0) \in D$ *ponthoz van egyetlen olyan* $I(t_0, p_0)$ *nyílt intervallum, melyen létezik (1)-(2)-nek megoldása, de ezt tartalmazó nyílt intervallumon már nem.*
2. *Ez az* $x : I(t_0, p_0) \to \mathbf{R}^n$ *megoldás egyértelmű, az* $x(t)$ *értékét jelölje* $\Phi(t, t_0, p_0)$.
3. *Ez a megoldás minden* $K \subset D$ *kompakt halmazt elhagy, azaz bármely* $K \subset D$ *kompakt halmazhoz és* $(t_0, p_0) \in D$ *ponthoz vannak olyan* $t_1, t_2 \in I(t_0, p_0)$ *számok, melyekre* $t_1 < t_0 < t_2$ *és* $(t_i, \Phi(t_i, t_0, p_0)) \notin K$ $(i = 1, 2)$.

1. Következmény. *Ha* $D = \mathbf{R}^{n+1}$ *és létezik olyan* $k > 0$, *hogy* $|\Phi(t, t_0, p_0)| \leq k$ *minden* $t \in I(t_0, p_0)$ *esetén, akkor* $I(t_0, p_0) = \mathbf{R}$.

6. Definíció. Az $I(t_0, p_0)$ intervallumot a (t_0, p_0) pontból induló megoldás *maximális értelmezési intervallumának*, a $t \mapsto \Phi(t, t_0, p_0)$ függvényt *globális, maximális, vagy teljes megoldásnak* nevezzük.

1.5. Folytonos függés

Legyen ismét $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ tartomány, és jelölje $\mathcal{F}$ a D halmazon folytonos MVLL függvények halmazát. Az (1)-(2) kezdetiérték feladat egy kimenet-bemenet rendszerként fogható fel, melynek bemeneti adatai az f függvény és a (t_0, p_0) pont, a kimeneti adatok pedig a $\Phi_f(t, t_0, p_0)$ megoldás (melynek most jelezzük az f-től való függését is), és annak maximális értelmezési intervalluma $I_f(t_0, p_0)$. Ebben a szakaszban a kimeneti adatok bementi adatoktól való folytonos függésével foglalkozunk három lépésben.

1.5.1.

Az első lépésben megmutatjuk, hogy a kimeneti adatok folytonosan függenek a p_0 ponttól. Az alábbi első egyszerű eredmény szerint a megoldás értéke folytonosan függ p_0-tól (a különböző pontokból induló megoldások közös értelmezési intervallumán).

6. Tétel. (Peano egyenlőtlenség) *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathcal{F}$ *függvény az egész* D *halmazon egyenletesen Lipschitz tulajdonságú a második változójában, azaz létezik* $L > 0$, *hogy*

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|,$$

minden $(t, p_1), (t, p_2) \in D$ *esetén. Ha* $\delta > 0$ *olyan, amelyhez létezik olyan* I *nyílt intervallum, hogy* $I \subset I(t_0, q)$, *minden* $|q - p_0| < \delta$ *esetén, akkor minden* $t \in I$ *számra*

$$|\Phi(t, t_0, p_0) - \Phi(t, t_0, q)| \leq |p_0 - q| \mathrm{e}^{L|t - t_0|}.$$

6. Lemma. *Legyen* $K \subset D$ *kompakt halmaz. Ekkor bármely* $f \in \mathcal{F}$ *függvény az egész* K *halmazon egyenletesen Lipschitz tulajdonságú a második változójában, azaz létezik* $L > 0$, *hogy minden* $(t, p_1), (t, p_2) \in K$ *esetén*

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq L|p_1 - p_2|.$$

7. Tétel. (folytonos függés p_0-tól) *Legyen* $f \in \mathcal{F}$. *Ekkor minden* $(t_0, p_0) \in D$ *ponthoz és minden* $I \subset I(t_0, p_0)$ *(*t_0*-t belsejében tartalmazó) kompakt intervallumhoz létezik olyan* $\delta > 0$ *és* $L > 0$, *hogy minden* q *pontra, melyre* $(t_0, q) \in D$ *és* $|q - p_0| < \delta$, *fennáll*

1. $I \subset I(t_0, q)$
2. $|\Phi(t, t_0, p_0) - \Phi(t, t_0, q)| \leq |p_0 - q| \mathrm{e}^{L|t - t_0|} \qquad t \in I.$

1.5.2.

A második lépésben megmutatjuk, hogy a megoldás értéke folytonosan függ az összes bemeneti adattól a különböző bemeneti adatokhoz tartozó megoldások közös értelmezési intervallumán. Legyen most $f \in \mathcal{F}$ és $(t_0, p_0) \in D$ rögzített. Legyen $I \subset I(t_0, p_0)$ egy kompakt intervallum, amely belsejében tartalmazza a t_0 pontot. Legyen $\Gamma \subset D$ a $\{(t, \Phi_f(t, t_0, p_0)) : t \in I\}$ görbe kompakt környezete. Jelölje $\|g\|_\Gamma = \max_\Gamma |g|$, ha $g \in \mathcal{F}$.

8. Tétel. (általános Peano egyenlőtlenség) *Létezik olyan $L > 0$, hogy minden $(\tau, q) \in \Gamma$ és $g \in \mathcal{F}$ esetén, melyekre $I \subset I_g(\tau, q)$, valamint $\{(t, \Phi_g(t, \tau, q)) : t \in I\} \subset \Gamma$ fennáll*

$$|\Phi_f(t, t_0, p_0) - \Phi_g(t, \tau, q)| \leq ((\|f\|_\Gamma + \|f - g\|_\Gamma)|\tau - t_0| + |p_0 - q|)\, \mathrm{e}^{L|t-t_0|} + \frac{\|f - g\|_\Gamma}{L}(\mathrm{e}^{L|t-t_0|} - 1). \quad (3)$$

Bizonyítás. Rövidség kedvéért vezessük be az $x(t) = \Phi_f(t, t_0, p_0)$, $y(t) = \Phi_g(t, \tau, q)$ jelöléseket. Valamint tegyük fel, hogy $t_0 < \tau < t$. A 3 Lemma szerint

$$x(t) = p_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\mathrm{d}s\ , \quad y(t) = q + \int_\tau^t g(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

Ezért

$$y(t) - x(t) = q - p_0 + \int_{t_0}^t g(s, y(s)) - f(s, y(s))\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) - f(s, x(s))\mathrm{d}s - \int_{t_0}^\tau g(s, y(s))\mathrm{d}s$$

A 6 Lemma szerint az f függvénynek az Γ halmazon van globális Lipschitz konstansa, jelölje ezt L. Bevezetve az $u(t) = |x(t) - y(t)|$ jelölést

$$u(t) \leq |q - p_0| + \|f - g\|_\Gamma(t - t_0) + \int_{t_0}^t Lu(s)\mathrm{d}s + \|g\|_\Gamma(\tau - t_0) \leq c(t) + \int_{t_0}^t Lu(s)\mathrm{d}s\ ,$$

ahol

$$c(t) = |q - p_0| + (\|f\|_\Gamma + \|f - g\|_\Gamma)(\tau - t_0) - \|f - g\|_\Gamma t_0 + \|f - g\|_\Gamma t.$$

Alkalmazva a Gronwall lemmát

$$u(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^t Lc(s)\mathrm{e}^{L(t-s)}\mathrm{d}s\ ,$$

amelyből átalakítások után a kívánt állítást kapjuk. $\square$

1.5.3.

Végül a harmadik lépésben megmutatjuk, hogy a kimeneti adatok folytonosan függenek az összes bementi adattól.

9. Tétel. (folytonos függés) *Legyen $f \in \mathcal{F}$. Ekkor minden $(t_0, p_0) \in D$ ponthoz, minden $I \subset I(t_0, p_0)$ (t_0-t belsejében tartalmazó) kompakt intervallumhoz és minden $\varepsilon > 0$ számhoz, melyre (az alább definiált) $\Gamma_\varepsilon \subset D$, létezik olyan $\delta > 0$ és $L > 0$, hogy minden q pontra, melyre $(t_0, q) \in D$, $|\tau - t_0| < \delta$, $|q - p_0| < \delta$, és $g \in \mathcal{F}$, $\|g - f\|_{\Gamma_\varepsilon} < \delta$ esetén*

(i) $I \subset I_g(\tau, q)$

(ii) fennáll (3).

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy

$$\Gamma_\varepsilon = \{(t, p) \in D :\ t \in I,\ |p - \Phi(t, t_0, p_0)| \leq \varepsilon\} \subset A$$

Legyen $\delta \in (0, 1)$ olyan, melyre

1. $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$
2. $\delta(1 + \|f\|_A) < \varepsilon$
3. $\delta[(2 + \|f\|_A)\mathrm{e}^{L|I|} + (\mathrm{e}^{L|I|} - 1)/L] < \varepsilon/2$

Legyenek $(\tau, q) \in D$ és $g \in \mathcal{F}$ olyanok, hogy

$$|\tau - t_0| < \delta \ , \quad |q - p_0| < \delta \ , \quad \|f - g\|_A < \delta$$

Legyenek ismét

$$x(t) = \Phi_f(t, t_0, p_0) \ , \qquad y(t) = \Phi_g(t, \tau, q)$$

Ekkor $(\tau, q) \in \Gamma_\varepsilon$, mert $\tau \in I$ és $|q - \Phi_f(\tau, t_0, p_0)| < \varepsilon$, ugyanis

$$|q - \Phi_f(\tau, t_0, p_0)| < |q - p_0| + |p_0 - \Phi_f(\tau, t_0, p_0)| \le \delta + |\int_\tau^{t_0} f(s, x(s))\mathrm{d}s| \le \delta + \delta\|f\|_A < \varepsilon$$

Megmutatjuk, hogy minden $t \in I \cap I_g(\tau, q)$ esetén

$$(t, \Phi_g(t, \tau, q)) \in \Gamma_\varepsilon \tag{4}$$

Rövidség kedvéért csak $t \ge \tau$ esetén igazoljuk az állítást. Tegyük fel indirekt módon, hogy van olyan $t_1 > \tau$ pont, ahol a pálya kiér a Γ_ε határára, azaz

$$|\Phi_g(t_1, \tau, q) - \Phi_f(t_1, t_0, p_0)| = \varepsilon$$

Legyen t_1 az első ilyen hely. Az általános Peano egyenlőtlenséget (8. Tétel) alkalmazva a (τ, t_1) intervallumra, ellentmondást kapunk:

$$\varepsilon = |\Phi_g(t_1, \tau, q) - \Phi_f(t_1, t_0, p_0)| \le [\delta(\delta + \|f\|_A) + \delta)]\mathrm{e}^{L|I|} + \delta(\mathrm{e}^{L|I|} - 1)/L <$$

$$\delta[(2 + \|f\|_A)\mathrm{e}^{L|I|} + (\mathrm{e}^{L|I|} - 1)/L] < \varepsilon/2$$

Mivel a megoldásnak el kell hagynia a Γ_ε kompakt halmazt, azért $I_g(\tau, q) \supset I$. A (ii) becslés az általános Peano egyenlőtlenségből következik. □

1.6. Differenciálható függés

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a $\Phi(t, t_0, p_0)$ megoldás differenciálhatóan függ p_0-tól.

10. Tétel. (differenciálható függés) *Tegyük fel, hogy az $f : D \to \mathbf{R}^n$ függvény k-szor folytonosan differenciálható. Ekkor a Φ függvény is k-szor folytonosan differenciálható a harmadik változója szerint, és tetszőleges $q \in \mathbf{R}^n$ esetén a $h(t) = \partial_3\Phi(t, t_0, p_0)q$ függvény megoldása a*

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \partial_2 f(t, \Phi(t, t_0, p_0))h(t) \\ h(t_0) &= q \end{aligned}$$

kezdetiérték-problémának.

2. Lineáris differenciálegyenletek

2.1. Előkészületek

2. Állítás. *1. Legyen $(x^{(k)}) \subset \mathbf{R}^n$ sorozat. Ekkor*

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

2. Legyen $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$*. Ekkor*

$$\lim_{t\to t_0} \|y(t) - v\|_p = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{t\to t_0} y_i(t) = v_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

3. Legyen $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$*. Ekkor*

$$y \text{ differenciálható} \quad\Longleftrightarrow\quad y_i \text{ differenciálható} \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

és $\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t), ..., \dot{y}_n(t))$*.*

Legyen V egy n dimenziós vektortér, benne $\{e_1, ..., e_n\}$ egy bázis. Jelölje $K : V \to \mathbf{R}^n$ a koordináta leképezést, amely minden vektorhoz a koordinátáit rendeli hozzá. Ennek segítségével lehet a V térben a p-normát definiálni: $\|v\|_p = \|K(v)\|_p$. Ez ekvivalens bármely V-n értelmezett normával, ezért fennáll az alábbi állítás.

3. Állítás. *Legyen* $\|\cdot\|$ *egy tetszőleges norma a* V *téren. Rövidség kedvéért tetszőleges* $v \in V$ *esetén legyen* $v_i = K(v)_i$*,* $(i = 1, \dots, n)$*.*

1. Legyen $(v^{(k)}) \subset V$ *sorozat. Ekkor*

$$\lim_{k\to\infty} \|v^{(k)} - v\| = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty} \|v^{(k)} - v\|_p = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k\to\infty} v_i^{(k)} = v_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

2. Legyen $y : \mathbf{R} \to V$*. Ekkor*

$$\lim_{t\to t_0} \|y(t) - v\| = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{t\to t_0} \|y(t) - v\|_p = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{t\to t_0} y_i(t) = v_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

3. Legyen $y : \mathbf{R} \to V$*. Ekkor*

$$y \text{ differenciálható} \quad\Longleftrightarrow\quad y_i \text{ differenciálható} \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

és $\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^n e_i \dot{y}_i(t)$*.*

Jelölje az $n \times n$ méretű mátrixok halmazát $\mathbf{R}^{n\times n}$.

7. Definíció. Egy $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrix p-normája legyen

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p.$$

4. Állítás. *Legyenek* $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *mátrixok,* $x \in \mathbf{R}^n$ *vektor. Ekkor*

1. $\|Ax\|_p \le \|A\|_p \|x\|_p$

2. $\|AB\|_p \le \|A\|_p \|B\|_p$

5. Állítás. *Legyen* $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *tetszőleges mátrix. Jelölje az* $A^T A$ *mátrix sajátértékeit* $\lambda_1, ..., \lambda_n$*. Ekkor*

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= \max_j \sqrt{\lambda_j} \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

6. Állítás. *Legyenek* $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times m}$ *és* $B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{m\times k}$ *differenciálható függvények, valamint legyen* $C(t) = A(t) \cdot B(t)$*. Ekkor*

$$\dot{C}(t) = \dot{A}(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot \dot{B}(t).$$

2.2. A lineáris differenciálegyenlet fogalma, megoldásának létezése és egyértelműsége

Legyen I nyílt intervallum, $A : I \to \mathbf{R}^{n \times n}$, $b : I \to \mathbf{R}^n$ folytonos függvények. Az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{5}$$

differenciálegyenletet *(inhomogén) elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Ha $b \equiv 0$, akkor az egyenletet *homogénnek*, ha pedig $A(t) \equiv B \in \mathbf{R}^{n \times n}$, akkor *állandó együtthatósnak* hívjuk.

A lineáris differenciálegyenlet nyilván az $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ általános alakú differenciálegyenlet speciális esete, amikor $D = I \times \mathbf{R}^n$, és $f(t,p) = A(t)p + b(t)$. Ez a függvény folytonos és MVLL, ezért a lineáris differenciálegyenletre a már bizonyított egzisztencia- és unicitástételek érvényesek. Az alábbi tétel nemcsak összefoglalja ezeket az eredményeket a lineáris differenciálegyenlet esetére, hanem annyival többet állít, hogy a globális megoldás ebben az esetben az egész I intervallumon értelmezhető.

11. Tétel. (létezés és egyértelműség) *Minden $t_0 \in I$ és $p_0 \in \mathbf{R}^n$ esetén a (5) differenciálegyenletnek létezik pontosan egy megoldása, amely kielégíti az $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltételt, és az egész I intervallumon értelmezve van.*

2.3. A lineáris differenciálegyenletmegoldásainak előállítása

2.3.1. Homogén egyenlet

12. Tétel. (A homogén egyenlet megoldásainak előállítása) *Az*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{6}$$

homogén egyenlet megoldásai a $C^1(I, \mathbf{R}^n)$ tér n-dimenziós alterét képezik, azaz vannak olyan $\phi_1, ..., \phi_n$ megoldások, hogy minden megoldás előáll $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(t)$ alakban, ahol $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Jelölje a megoldások terét M.

2. Következmény. *Legyenek $\phi_1, ..., \phi_k \in M$. Az alábbi három állítás ekvivalens.*

1. *A $\phi_1, ..., \phi_k$ függvények lineárisan függetlenek a $C^1(I, \mathbf{R}^n)$ térben.*
2. *A $\phi_1(t), ..., \phi_k(t)$ vektorok minden $t \in I$ esetén lineárisan függetlenek.*
3. *Létezik olyan $t_0 \in I$, melyre a $\phi_1(t_0), ..., \phi_k(t_0)$ vektorok lineárisan függetlenek.*

8. Definíció. A megoldások M terének egy $\phi_1, ..., \phi_n$ bázisát a (6) homogén egyenlet *alaprendszerének*, az ezekből, mint oszlopvektorokból képezett $\Psi(t) = (\phi_1(t) ... \phi_n(t))$ mátrixot az egyenlet *alapmátrixának* nevezzük. A $W(t) = \det \Psi(t)$ függvényt *Vronszkij-determinánsnak* nevezzük.

7. Állítás. *Legyen $\Psi : I \to \mathbf{R}^n$ az (6) homogén egyenlet egy alapmátrixa. Ekkor*

1. *Az (6) homogén egyenlet minden megoldása előláll $x(t) = \Psi(t)c$ alakban, ahol $c \in \mathbf{R}^n$.*
2. *Minden $t \in I$ esetén létezik a $\Psi(t)$ mátrix inverze, és az (6) egyenlet $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:*
$$\Phi_{hom}(t, t_0, p_0) = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(t_0) \cdot p_0$$
3. *Minden $t \in I$ számra $\dot{\Psi}(t) = A(t) \cdot \Psi(t)$*

2.3.2. Inhomogén egyenlet

13. Tétel. (Az inhomogén egyenlet megoldásainak előállítása) *Az*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{7}$$

inhomogén egyenlet megoldásai az M altér egy eltoltját képezik, azaz, ha ϕ_p a (7) egyenlet egy megoldása (ún. partikuláris megoldás), és Ψ a homogén egyenlet egy alapmátrixa, akkor a (7) egyenlet minden megoldása előáll $x(t) = \phi_p(t) + \Psi(t)c$ alakban, ahol $c \in \mathbf{R}^n$.

14. Tétel. (az állandók variálásának módszere) *A (7) egyenlet $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:*

$$\Phi_{inhom}(t, t_0, p_0) = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(t_0) \cdot p_0 + \Psi(t) \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s.$$

2.3.3. Állandó együtthatós egyenlet

Az eddigiekben láttuk, hogy a (5) lineáris differenciálegyenlet megoldásai előállíthatók a homogén egyenlet alaprendszerének (n db lineárisan független megoldásának) segítségével. Az alaprendszer előállítására, azonban csak az állandó együtthatós egyenlet esetében van általános módszer. Legyen most $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ egy mátrix. A továbbiakban megmutatjuk, hogy az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{8}$$

állandó együtthatós lineáris egyenlet egy alapmátrixa e^{At} alakú.

7. Lemma.

1. *Bármely $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixra a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ sor normában (és így elemenként is) konvergens.*
2. *Legyenek $A_n, B_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ olyan mátrixok, melyekre a $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ sorok abszolút konvergensek. Legyen $C_n = \sum_{i+k=n} A_i B_k$. Ekkor a Cauchy szorzat $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ is konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = (\sum_{n=0}^{\infty} A_n)(\sum_{n=0}^{\infty} B_n).$$

9. Definíció. Legyen $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ egy mátrix. Legyen

$$\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

8. Lemma. *Legyenek $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrixok, $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ pedig egy invertálható mátrix. Ekkor*

1. $\mathrm{e}^{PAP^{-1}} = P\mathrm{e}^A P^{-1}$
2. *Ha $AB = BA$, akkor* $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ $(= \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A)$.
3. $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$
4. *A $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$, $h(t) = \mathrm{e}^{At}$ függvény differenciálható, és $\dot{h}(t) = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A$*

15. Tétel. (Az állandó együtthatós egyenlet megoldásainak előállítása)

1. *A (8) egyenlet egy alapmátrixa $\Psi(t) = \mathrm{e}^{At}$*
2. *A (8) egyenlet $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása*

$$\Phi_{hom}(t, t_0, p_0) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \cdot p_0$$

3. *Az $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$ inhomogén egyenlet $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása*

$$\Phi_{inhom}(t, t_0, p_0) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \cdot p_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-s)} \cdot b(s)\mathrm{d}s.$$

2.3.4. Az e^{At} mátrix kiszámítása

Ebben a szakaszban mutatunk kétféle módszert az e^{At} mátrix előállítására.

I. Az e^{At} mátrix kiszámítása Hermite-féle interpolációs polinom segítségével.

16. Tétel. *Jelölje az A mátrix minimálpolinomjának fokát m, az A különböző sajátértékeit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, ezek multiplicitását a minimálpolinomban $m_1, \dots, m_k$. Létezik olyan legfeljebb $m-1$-ed fokú p polinom (Hermite-féle interpolációs polinom), melyre $e^{At} = p(A)$. Ezt a polinomot az alábbi egyenletek határozzák meg:*

$$p^{(i)}(\lambda_j) = t^i e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, \dots, k\ ;\ i = 0, 1, \dots, m_j - 1)$$

II. Az e^{At} mátrix kiszámítása Jordan-féle normálforma segítségével.

Legyen $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ egy invertálható mátrix, és legyen $B = P^{-1}AP$. Ekkor $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$. A cél olyan B mátrixot választani, amelynél az e^{Bt} kiszámítása minél egyszerűbb. Amint látni fogjuk erre igen alkalmas a mátrix valós Jordan normálakja, ugyanis ez egyszerű szerkezetű, így könnyű hatványozni, és mivel csak valós számokat tartalmaz azért a valós megoldást állítja elő.

Először emlékeztetőül kimondjuk a Jordan normálformáról szóló tételt. Majd megmutatjuk, hogy a valós Jordan normálforma milyen szerkezetű lehet, és kiszámítjuk a lehetséges Jordan blokkok exponenciális függvényét.

17. Tétel. (Jordan normálforma) *Minden $A \in \mathbf{C^{n\times n}}$ mátrixhoz létezik olyan $P \in \mathbf{C^{n\times n}}$ invertálható mátrix, melyre*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}$$

ahol egy blokk az alábbi két típus valamelyikébe tartozik:

$$J_k = (\lambda) \in \mathbf{R}^{1\times 1} \qquad \text{vagy} \qquad J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{l\times l}$$

és λ sajátértéke az A mátrixnak. Egy sajátértékhez tartozó blokkok száma megegyezik a hozzá tartozó lineárisan független sajátvektorok számával (dimKer$(A - \lambda I)$). A legnagyobb λ blokk mérete egyenlő a λ multiplicitásával az A minimálpolinomjában.

18. Tétel. (valós Jordan normálforma) *Minden $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixhoz létezik olyan $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix, melyre*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_r \end{pmatrix}$$

ahol egy blokk négy típus valamelyikébe tartozik: olyan, mint az előző tételben, ha λ valós sajátértéke az A mátrixnak, vagy

$$J_k = D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2} \qquad \text{vagy} \qquad J_k = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & I_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & D & I_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2m\times 2m}$$

ha $a \pm \mathrm{i}b$ sajátértéke az A mátrixnak, és I_2 a 2×2-es egységmátrixot jelöli.

9. Lemma. (Jordan blokkok exponenciális függvénye)

$$\text{Ha } J = (\lambda) \in \mathbf{R}^{1\times 1} \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{Jt} = (\mathrm{e}^{\lambda t})$$

$$\text{Ha } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{l\times l} \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ha } J = D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2} \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{e}^{at} C = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

$$\text{Ha } J = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & I_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & D & I_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2m\times 2m} \text{ akkor } \mathrm{e}^{Jt} = \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} C & Ct & C\frac{t^2}{2} & \dots & C\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & C & Ct & C\frac{t^2}{2} & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C & Ct \\ 0 & \dots & \dots & 0 & C \end{pmatrix}$$

19. Tétel. (Az e^{At} mátrix kiszámítása) *Az e^{At} mátrix minden eleme, és így a (8) egyenlet bármely megoldásának minden koordinátája $t^k\mathrm{e}^{at}\cos bt$, illetve $t^l\mathrm{e}^{at}\sin bt$ alakú függvények lineáris kombinációja, ahol $a\pm \mathrm{i}b$ sajátértéke az A mátrixnak, és k,l olyan természetes számok, melyek kisebbek, mint a sajátérték multiplicitása a minimálpolinomban.*

2.4. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

Legyen I nyílt intervallum, $a_i, f : I \to \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ folytonos függvények. Az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = f(t) \tag{9}$$

differenciálegyenletet *(inhomogén) n-ed rendű lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Ha $f \equiv 0$, akkor az egyenletet *homogénnek*, ha pedig $a_i(t) \equiv b_i \in \mathbf{R}$, akkor *állandó együtthatósnak* hívjuk.

Az 1. fejezetben ismertetett módon a (9) n-ed rendű differenciálegyenlet az $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$,..., $y_n = x^{(n-1)}$ új függvények bevezetésével az alábbi elsőrendű rendszerré transzformálható:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n(t) &= f(t) - [a_{n-1}(t)y_n(t) + \ldots + a_1(t)y_2(t) + a_0(t)y_1(t)] \end{aligned}$$

Ez a rendszer az

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

jelölésekkel az

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{10}$$

alakba írható. Ez a rendszer az alábbi értelemben egyenértékű a (9) egyenlettel:

8. Állítás.
- *Ha $x \in C^n(I, \mathbf{R})$ megoldása a (9) egyenletnek, akkor az*

$$y = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \in C^1(I, \mathbf{R}^n)$$

függvény megoldása a (10) rendszernek.

- *Ha $y \in C^1(I, \mathbf{R}^n)$ megoldása a (10) rendszernek, akkor $y_1 \in C^n(I, \mathbf{R})$ megoldása a (9) egyenletnek.*

Ez az Állítás lehetővé teszi, hogy a lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó eredményeket átvigyük a magasabb rendű lineáris differenciálegyenletkre. A továbbiakban ezzel foglalkozunk.

20. Tétel. (Létezés és egyértelműség) *Minden $t_0 \in I$ és $p \in \mathbf{R}^n$ esetén a (9) differenciálegyenletnek létezik pontosan egy megoldása, amely kielégíti az $x^{(k)}(t_0) = p_{k+1}$ $(k = 0, \dots, n-1)$ kezdeti feltételeket, és az egész I intervallumon értelmezve van.*

21. Tétel. (A megoldások előállítása az alaprendszer segítségével)

1. *Az*
$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = 0$$
homogén egyenlet megoldásai a $C^n(I, \mathbf{R})$ tér egy, M-mel jelölt, n-dimenziós alterét képezik, azaz vannak olyan $\phi_1, ..., \phi_n$ megoldások (alaprendszer), hogy minden megoldás előáll $x(t) = \sum_{i=1}^n c_i\phi_i(t)$ alakban, ahol $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

2. *A (9) inhomogén egyenlet megoldásai az M altér egy eltoltját képezik, azaz, ha ϕ_p a (9) egyenlet egy megoldása (ún. partikuláris megoldás), és $\phi_1, ..., \phi_n$ a homogén egyenlet egy alaprendszere, akkor a (9) egyenlet minden megoldása előáll $x(t) = \phi_p(t) + \sum_{i=1}^n c_i\phi_i(t)$ alakban, ahol $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$.*

4. Megjegyzés. A partikuláris megoldást a rendszerré írás után az állandók variálásának módszerével meg lehet adni, de ezzel most itt nem foglalkozunk.

Az alaprendszer előállítására ebben az esetben is csak az állandó együtthatós egyenlet esetében van általános módszer. Ezért tekintsük a továbbiakban az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = 0 \tag{11}$$

állandó együtthatós differenciálegyenletet, ahol $a_i \in \mathbf{R}$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

22. Tétel. (Az alaprendszer előállítása) *Jelölje a*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{12}$$

egyenlet valós gyökeit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, nem valós gyökeit $\lambda_{m+1} = \alpha_{m+1} + \mathrm{i}\beta_{m+1}, \lambda_{m+2} = \alpha_{m+1} - \mathrm{i}\beta_{m+1} \dots, \lambda_{m+2r} = \alpha_{m+r} - \mathrm{i}\beta_{m+r}$, a k-adik gyök multiplicitását jelölje n_k. Az alábbi n darab függvény a (11) differenciálegyenlet egy alaprendszerét képezi:

- $t \mapsto t^l \mathrm{e}^{\lambda_k t}$, *ahol* $l = 0, \dots, n_k - 1$ *és* $k = 1, \dots, m$.
- $t \mapsto t^l \mathrm{e}^{\alpha_{m+k} t} \cos\beta_{m+k}t$, *ahol* $l = 0, \dots, n_{m+2k} - 1$ *és* $k = 1, \dots, r$.
- $t \mapsto t^l \mathrm{e}^{\alpha_{m+k} t} \sin\beta_{m+k}t$, *ahol* $l = 0, \dots, n_{m+2k} - 1$ *és* $k = 1, \dots, r$.

3. Autonóm differenciálegyenletek, dinamikai rendszerek

Legyen $M \subset \mathbf{R}^n$ tartomány, $f : M \to \mathbf{R}^n$ lokálisan Lipschitz tulajdonságú függvény . Az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{13}$$

differenciálegyenletet *autonóm differenciálegyenletnek* nevezzük.

Az 1. fejezetbeli eredmények alapján bármely $t_0 \in \mathbf{R}$ és $p_0 \in M$ esetén létezik a (13) egyenletnek az $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltételt kielégítő $x(t) = \Phi(t, t_0, p_0)$ globális megoldása az $I(t_0, p_0)$ intervallumon.

Az autonóm differenciálegyenletek megoldásainak legfontosabb tulajdonsága az alábbi eltolásinvariancia:

9. Állítás. *Ha az $x : I \to \mathbf{R}^n$ függvény megoldása a (13) egyenletnek az I intervallumon, akkor bármely $\tau \in \mathbf{R}$ esetén az $y(t) = x(t + \tau)$ függvény is megoldás az $I - \tau = \{t \in \mathbf{R} : t + \tau \in I\}$ intervallumon.*

Ennek következménye az alábbi:

10. Állítás. *Bármely* $t_0 \in \mathbf{R}$, $p_0 \in M$ *és* $\tau \in \mathbf{R}$ *esetén*

- $I(t_0 + \tau, p_0) = \tau + I(t_0, p_0)$
- $\Phi(t + \tau, t_0 + \tau, p_0) = \Phi(t, t_0, p_0)$ *minden* $t \in I(t_0, p_0)$ *számra.*

Így egy autonóm differenciálegyenlet esetében elég a $t_0 = 0$ időpontban a különböző $p \in M$ pontokból induló megoldásokat ismerni, mert a többi megoldás ezekből eltolással adódik. Ezért vezetjük be az alábbi jelöléseket:

$$I(p) = I(0, p); \qquad \phi(t, p) = \Phi(t, 0, p) \quad (p \in M,\ t \in I(p))$$

5. Megjegyzés. Itt az I jelet két különböző függvény jelölésére használtuk, de ez a későbbiekben nem okoz félreértést, mert ezután az I argumentumában csak egy R^n-beli pont (p) fog szerepelni.

11. Állítás. (Csoporttulajdonság) *Legyen* $p \in M$, $t, s \in \mathbf{R}$ *olyanok, hogy* $t+s \in I(p)$. *Ekkor* $\phi(t+s, p) = \phi(t, \phi(s, p))$

12. Állítás. *Legyen* $\sim \subset M \times M$ *a következő reláció:* $p \sim q$ *pontosan akkor, ha van olyan* $t \in \mathbf{R}$, *melyre* $\phi(t, q) = p$. *A* $\sim$ *ekvivalencia reláció.*

10. Definíció. A $\sim$ reláció osztályait a (13) differenciálegyenlet *pályáinak (trajektóriáinak)* nevezik.

Tehát egy $p \in M$ pont pályája (osztálya) a $\{\phi(t, p) : t \in I(p)\}$ görbe. Ezek a görbék nem metszik egymást és lefedik az egész M halmazt. Az autonóm egyenletek ezen tulajdonságának absztrakciójával fogalmazható meg a dinamikai rendszer alábbi definíciója.

11. Definíció. Legyen $M \subset \mathbf{R}^n$ tartomány. A $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ folytonosan differenciálható függvényt *dinamikai rendszernek* nevezik az M *fázistéren*, ha rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

1. $\phi(0, p) = p$, minden $p \in M$ esetén,
2. $\phi(t + s, p) = \phi(t, \phi(s, p))$, minden $p \in M$ és $t, s \in \mathbf{R}$ esetén.

6. Megjegyzés. 1. A dinamikai rendszer fogalma több irányban általánosítható. Egyrészt az M lehet egy differenciálható sokaság, vagy egy Banach-tér. Másrészt az $\mathbf{R}$ helyett állhat egy G topologikus csoport, ekkor M egy topologikus tér, és a ϕ függvényről csak folytonosságot tételeznek fel. Nagyon fontos speciális eset, amikor $G = \mathbf{Z}$, ekkor diszkrét dinamikai rendszerről beszélnek.

2. A dinamikai rendszer egy determinisztikus folyamat modellje. Az M a rendszer állapotainak halmaza, $\phi(t, p)$ pedig azt adja meg, hogy hová kerül a rendszer a p állapotból indulva t idő múlva.

3. A $\phi_t = \phi(t, \cdot)$ jelöléssel a $\phi_t : M \to M$ függvény minden $t \in \mathbf{R}$ esetén egy diffeomorfizmus, melyre $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$. Így a ϕ az $(\mathbf{R}, +)$ csoport hatása az M halmazon.

12. Definíció. Legyen $p \in M$. A $\{\phi(t, p) : t \in \mathbf{R}\}$ görbét a p pont *pályájának (trajektóriájának)* nevezik.

Egy autonóm differenciálegyenlet megoldásai a 11 Állítás szerint egy dinamikai rendszert határoznak meg, ha minden megoldás az egész $\mathbf{R}$ halmazon értelmezve van. Ez nem igaz minden differenciálegyenletre, de az alábbiakban megmutatjuk, hogy minden differenciálegyenlethez megadható egy olyan differenciálegyenlet, melynek megoldásai az egész $\mathbf{R}$ halmazon értelmezve vannak, de pályái, és rajtuk az irányítás megegyezik az eredetiével. Ezzel tehát megmutatjuk, hogy egy autonóm differenciálegyenlethez mindig van olyan dinamikai rendszer, melynek pályái megegyeznek a differenciálegyenlet pályáival, és fordítva. A tétel bizonyításában kulcsfontosságú az alábbi, egyébként önmagában is fontos lemma.

10. Lemma. *Legyen* $v : M \to \mathbf{R}_+$ *lokálisan Lipschitz tulajdonságú függvény . Ekkor az* $\dot{x}(t) = f(x(t))$ *és az* $\dot{y}(t) = f(y(t))v(y(t))$ *differenciálegyenletek pályái megegyeznek, és rajtuk az irányítás (t növekedése) egyforma.*

23. Tétel. (autonóm differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek egyenértékűsége) *Legyen* $M = \mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *folytonosan differenciálható. Ekkor létezik olyan dinamikai rendszer, melynek pályái megegyeznek az* $\dot{x} = f \circ x$ *differenciálegyenlet pályáival. Valamint megfordítva, bármely dinamikai rendszerhez van olyan* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *folytonosan differenciálható függvény hogy az* $\dot{x} = f \circ x$ *differenciálegyenlet megoldásai a dinamikai rendszert adják.*

7. Megjegyzés. A tételben az $M = \mathbf{R}^n$ feltétel elhagyható, azonban akkor a bizonyítás bonyolultabb, ugyanis az is előfordulhat , hogy egy megoldás azért nincs az egész $\mathbf{R}$ halmazon értelmezve, mert véges idő alatt az M halmaz határához tart.

A szakasz hátralevő részében a dinamikai rendszerek pályáinak legegyszerűbb topológiai tulajdonságaival foglalkozunk. Legyen $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer.

13. Definíció. Egy $p \in M$ pontot *egyensúlyi, vagy stacionárius pontnak* nevezünk, ha minden $t \in \mathbf{R}$ számra $\phi(t, p) = p$. Egy $p \in M$ pontot *periodikus pontnak* nevezünk T periodussal, ha minden $t \in \mathbf{R}$ számra $\phi(t + T, p) = \phi(t, p)$. A periodikus pont pályáját *periodikus pályának* nevezzük. Egy $H \subset M$ halmazt *invariánsnak* nevezünk, ha minden $t \in \mathbf{R}$ számra, és $p \in H$ pontra $\phi(t, p) \in H$. Egy $H \subset M$ halmazt *pozitívan (negatívan) invariánsnak* nevezünk, ha minden $t \geq 0$ $(t \leq 0)$ számra, és $p \in H$ pontra $\phi(t, p) \in H$.

13. Állítás. *Egy periodikus pont pályájának minden pontja ugyanakkora periodussal periodikus.*

24. Tétel. (A pályák topológiája) *Ha egy* $p \in M$ *pont pályája metszi önmagát, akkor* p *vagy egyensúlyi pont, vagy olyan periodikus pont, aminek létezik legkisebb pozitív periodusa.*

4. Stabilitáselmélet

4.1. Stabilitásfogalmak

Legyen $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ tartomány, $f : D \to \mathbf{R}^n$ folytonos MVLL függvény, $(t_0, p_0) \in D$. Emlékeztetünk, arra hogy az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{14}$$

differenciálegyenlet $x(t_0) = p_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását $\Phi(t, t_0, p_0)$ jelölte.

14. Definíció. A $t \mapsto \Phi(t, t_0, p_0)$ megoldást *stabilisnak* nevezzük, ha

- $[t_0, +\infty) \subset I(t_0, p_0)$
- Minden $\varepsilon > 0$ és $t_1 \in [t_0, +\infty)$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $(t_1, q) \in D$, $|q - \Phi(t_1, t_0, p_0)| < \delta$ esetén $[t_1, +\infty) \subset I(t_1, q)$ és $|\Phi(t, t_1, q) - \Phi(t, t_0, p_0)| < \varepsilon$, ha $t \geq t_1$.

A megoldást *instabilisnak* nevezzük, ha nem stabilis. *Aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis és $|\Phi(t, t_1, q) - \Phi(t, t_0, p_0)| \to 0$, ha $t \to +\infty$.

14. Állítás. *A (14) rendszer egy* x *megoldásának stabilitása (aszimptotikus stabilitása) egyenértékű az*

$$\dot{y}(t) = f(t, x(t) + y(t)) - f(t, x(t)) \tag{15}$$

rendszer azonosan 0 *megoldásának stabilitásával (aszimptotikus stabilitásával).*

Legyen most $M \subset \mathbf{R}^n$ tartomány, $f : M \to \mathbf{R}^n$ lokálisan Lipschitz tulajdonságú függvény . Az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{16}$$

autonóm differenciálegyenlet $x(0) = p$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását jelölje $\phi(t, p)$.

15. Állítás. *Legyen* $p \in M$ *egyensúlyi pont* $(f(p) = 0)$*. Az alábbi három állítás ekvivalens:*

1. *p stabilis.*
2. *Az $\dot{y}(t) = f(y(t) + p)$ differenciálegyenlet azonosan 0 megoldása stabilis.*
3. *Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $q \in M$, $|q - p| < \delta$, $t \geq 0$ esetén $|\phi(t, q) - p| < \varepsilon$.*

4.2. Lineáris rendszer stabilitásvizsgálata

Legyen $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ folytonos függvény .

16. Állítás. *Az $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ lineáris differenciálegyenlet bármely megoldásának stabilitása (aszimptotikus stabilitása) egyenértékű az azonosan 0 megoldás stabilitásával (aszimptotikus stabilitásával).*

Legyen most $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ egy mátrix. A továbbiakban az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{17}$$

állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet stabilitásával foglalkozunk. Az előbbi állítás szerint elegendő a 0 megoldás stabilitását vizsgálni. Ennek stabilitása a 19 Tétel szerint az A mátrix sajátértékei valós részének előjelétől függ. Most azt fogjuk vizsgálni, hogy az A sajátértékei hogyan határozzák meg a (17) differenciálegyenlet stabilitását. Jelölje $\sigma(A)$ az A sajátértékeinek halmazát.

11. Lemma.

1. *Ha az A mátrixnak van nemnegatív valós részű sajátértéke, akkor a (17) rendszer nem aszimptotikusan stabilis.*
2. *Ha az A mátrixnak van pozitív valós részű sajátértéke, akkor a (17) rendszer nem stabilis, azaz instabilis.*
3. *Ha az A mátrixnak van olyan 0 valós részű sajátértéke, amely a minimálpolinomnak többszörös gyöke, akkor a (17) rendszer nem stabilis, azaz instabilis.*

12. Lemma. *Legyenek $\alpha \in \mathbf{R}$ olyan szám, melyre $\mathrm{Re}\lambda \le \alpha$ minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén, és $\mathrm{Re}\lambda = \alpha$ esetén λ multiplicitása a minimálpolinomban 1. Ekkor van olyan bázis $\mathbf{R}^n$-ben, hogy az azzal meghatározott $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalárszorzatra, és $\|\cdot\|_2$ normára*

$$\langle Ap, p\rangle \le \alpha\|p\|_2^2, \quad p \in \mathbf{R}^n$$

25. Tétel. (állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet stabilitásvizsgálata)

1. *Az alábbi három állítás ekvivalens:*
   (a) *A (17) differenciálegyenlet aszimptotikusan stabilis.*
   (b) *Minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén $\mathrm{Re}\lambda < 0$.*
   (c) *Van olyan $K, \alpha > 0$, hogy $|\mathrm{e}^{At}p| \le K\mathrm{e}^{-\alpha t}|p|$, ha $t \ge 0$, $p \in \mathbf{R}^n$*
2. *Az alábbi három állítás ekvivalens:*
   (a) *A (17) differenciálegyenlet stabilis.*
   (b) *Minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén $\mathrm{Re}\lambda \le 0$, és $\mathrm{Re}\lambda = 0$ esetén λ multiplicitása a minimál polinomban 1.*
   (c) *Van olyan $K > 0$, hogy $|\mathrm{e}^{At}p| \le K|p|$, ha $t \ge 0$, $p \in \mathbf{R}^n$*

Tehát a (17) differenciálegyenlet aszimptotikusan stabilis, ha az A sajátértékeinek valósrésze negatív. Az alábbi tétel arra szolgál, hogy ezt a sajátértékek kiszámítása nélkül el lehessen dönteni.

26. Tétel. (Routh-Hurwitz kritérium) *Legyen $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ egy tetszőleges polinom. A p minden gyökének valósrésze pontosan akkor negatív, ha az alábbi $n \times n$-es mátrix pozitív definit, azaz főminorjai pozitívak.*

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$

15. Definíció. Legyen egy az A valós normálalakját meghatározó bázis $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathbf{R}^n$. Jelölje $\lambda_k \in \sigma(A)$ azt a sajátértéket, amelyhez az u_k bázisvektor tartozik (u_k nem feltétlenül sajátvektor). Az

$$E_s = \langle\{u_k : \mathrm{Re}\lambda_k < 0\}\rangle, \quad E_u = \langle\{u_k : \mathrm{Re}\lambda_k > 0\}\rangle, \quad E_c = \langle\{u_k : \mathrm{Re}\lambda_k = 0\}\rangle$$

altereket rendre a (17) differenciálegyenlet *stabilis, instabilis, centrális alterének* nevezzük. ($\langle\cdot\rangle$ a zárójelben levő vektorok által kifeszített alteret jelöli.)

27. Tétel. *Az E_s, E_u, E_c alterek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:*

1. $E_s \oplus E_u \oplus E_c = \mathbf{R}^n$
2. *Invariánsak A-ra (azaz $A(E_i) \subset E_i$, $i = s, u, c$), és e^{At}-re.*
3. *Minden $p \in E_s$ esetén $\mathrm{e}^{At}p \to 0$, ha $t \to +\infty$, sőt van olyan $K, \alpha > 0$, hogy $|\mathrm{e}^{At}p| \leq K\mathrm{e}^{-\alpha t}|p|$, ha $t \geq 0$.*
4. *Minden $p \in E_u$ esetén $\mathrm{e}^{At}p \to 0$, ha $t \to -\infty$, sőt van olyan $L, \beta > 0$, hogy $|\mathrm{e}^{At}p| \leq L\mathrm{e}^{\beta t}|p|$, ha $t \leq 0$.*

4.3. Egyensúlyi pont stabilitásvizsgálata linearizálással

Legyen most $M \subset \mathbf{R}^n$ tartomány, $f : M \to \mathbf{R}^n$ differenciálható függvény . Legyen $p \in M$ az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{18}$$

autonóm differenciálegyenlet egyensúlyi pontja (azaz $f(p) = 0$). Legyen $y(t) = x(t) - p$. Ekkor

$$\dot{y}(t) = f(y(t) + p). \tag{19}$$

Az f függvény differenciálhatósága miatt

$$f(p + q) = f'(p)q + a(q), \tag{20}$$

minden $q \in M$ pontra a p egy környezetében, ahol a olyan függvény melyre

$$\lim_{q \to 0} \frac{|a(q)|}{|q|} = 0. \tag{21}$$

Bevezetve az $A = f'(p)$ jelölést a (19) és (20) egyenletekből az y függvényre az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + a(y(t)). \tag{22}$$

A 15 Állítás szerint a (22) differenciálegyenlet azonosan 0 megoldásának stabilitása (aszimptotikus stabilitása) egyenértékű a p pont stabilitásával (aszimptotikus stabilitásával). A linearizálás esetünkben azt jelenti, hogy a p pont stabilitását a lineáris rész, azaz az A mátrix sajátértékeinek segítségével döntjük el. Ehhez szükség van a következő lemmára.

13. Lemma. (Konstans-variációs formula) *A (22) differenciálegyenlet bármely megoldására*

$$y(t) = \mathrm{e}^{At} \cdot y(0) + \mathrm{e}^{At} \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{-As} \cdot a(y(s))\mathrm{d}s \tag{23}$$

28. Tétel. *1. Ha az A mátrix minden sajátértéke negatív valósrészű, akkor p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontja a (18) differenciálegyenletnek.*

2. Ha az A mátrixnak van pozitív valósrészű sajátértéke, akkor p instabilis egyensúlyi pontja a (18) differenciálegyenletnek.

4.4. Ljapunov módszere

Legyenek M és f olyanok, mint az előző szakaszban. Legyen $U \subset M$ nyílt halmaz, és $V : U \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény .

16. Definíció. *A V függvény deriváltja az f vektormező mentén (vagy a V függvény Lie-deriváltja, vagy a V deriváltja a (18) rendszer szerint)* az alábbi függvény

$$L_f V = \langle V', f\rangle \quad \text{azaz} \quad (L_f V)(p) = \langle V'(p), f(p)\rangle, \quad p \in \mathbf{R}^n \tag{24}$$

17. Állítás. *Legyen x a (18) differenciálegyenlet egy megoldása. Ekkor a $V^*(t) = V(x(t))$ képlettel definiált függvényre $\dot{V}^*(t) = (L_f V)(x(t))$.*

Tehát az $L_f V$ függvény előjele mutatja meg, hogy a V függvény értéke a megoldások mentén növekszik, vagy csökken. Ljapunov módszerének lényege olyan V függvény választása, amely monoton a megoldások mentén, és monotonitása a megoldások kiszámítása nélkül eldönthető. Fontos speciális eset, amikor a V függvény értéke a megoldások mentén állandó.

17. Definíció. *A V függvényt a (18) rendszer első integráljának nevezik, ha $L_f V \equiv 0$.*

A továbbiakban Ljapunov-függvény segítségével vizsgáljuk az egyensúlyi pontok stabilitását. Legyen $p \in M$ a (18) differenciálegyenlet egyensúlyi pontja ($f(p) = 0$).

29. Tétel. (Ljapunov stabilitási tétele) *Ha van a p pontnak olyan U nyílt környezete, amelyen megadható olyan $V : U \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1. *$V(p) < V(q)$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra.*
2. *$(L_f V)(q) \leq 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra.*

akkor p stabilis egyensúlyi pont. Ha $(L_f V)(q) < 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra, akkor p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont.

30. Tétel. (Ljapunov instabilitási tétele) *Ha van a p pontnak olyan U nyílt környezete, amelyen megadható olyan $V : U \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1. *p nem lokális minimuma a V függvénynek.*
2. *$(L_f V)(q) < 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra.*

akkor p instabilis egyensúlyi pont.

31. Tétel. (Barbasin-Kraszovszkij tétel) *Ha van a p pontnak olyan U nyílt környezete, amelyen megadható olyan $V : U \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1. *$V(p) < V(q)$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra.*
2. *$(L_f V)(q) \leq 0$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra.*
3. *Létezik a p pontnak olyan környezete, amelyben a p ponton kívül minden pálya mentén a V értéke nem állandó.*

akkor p aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont.

32. Tétel. *Ha van a p pontnak olyan U nyílt környezete, amelyen megadható olyan $V : U \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1. *$V(p) = 0$ és p nem lokális minimuma a V függvénynek.*
2. *Létezik olyan $\alpha > 0$, hogy $(L_f V)(q) \leq \alpha V(q)$ minden $q \in U \setminus \{p\}$ pontra.*

akkor p instabilis egyensúlyi pont.

4.5. Kvadratikus Ljapunov függvények, lineáris rendszer Ljapunov függvénye

Az előző szakaszban megmutattuk, hogy megfelelő tulajdonságú Ljapunov függvény választásával, hogyan lehet a stabilitást meghatározni. Azonban arról még nem szóltunk, hogy hogyan lehet egy ilyen Ljapunov függvényt megadni. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a kvadratikus alakok hogyan használhatók Ljapunov függvényként, elsősorban lineáris differenciálegyenletekhez. A lineáris rendszerek stabilitását a sajátértékek segítségével már meg tudjuk határozni, így ehhez nem lenne szükség Ljapunov függvényre. Azonban látni fogjuk, hogy a lineáris rendszerhez készített kvadratikus Ljapunov függvény több szempontból hasznos. Például használható lesz a nemlineáris rendszer egyensúlyi pontjának stabilitásvizsgálatára.

18. Definíció. Legyen $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix . A $Q_B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$Q_B(p) = \langle Bp, p\rangle = p^T Bp = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_ip_j \quad p \in \mathbf{R}^n \tag{25}$$

függvényt a B mátrix által meghatározott *kvadratikus alaknak* nevezik.

8. Megjegyzés. A kvadratikus alak meghatározza a szimmetrikus mátrixot, amely azt előállítja. (Nem szimmetrikus mátrixszal is lehet kvadratikus alakot definiálni, azonban ez a kvadratikus alak is előállítható egy szimmetrikus mátrixszal, valamint különböző nem szimmetrikus mátrixok is előállíthatják ugyanazt a kvadratikus alakot.) A kvadratikus alakok, illetve szimmetrikus mátrixok halmazát azonosítjuk $\mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$-vel.

18. Állítás. *Legyen B szimmetrikus, A tetszőleges mátrix .*

1. $Q'_B(p) = 2Bp$
2. $L_A Q_B = Q_{A^TB+BA}$
3. *Bármely C negatív definit mátrixhoz létezik $\gamma > 0$, melyre $Q_C(p) \le -\gamma|p|^2$ minden $p \in \mathbf{R}^n$ esetén.*

Ez az állítás mutatja, hogy egy kvadratikus alak milyen esetben használható Ljapunov függvénynek egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerhez. Legyen A egy tetszőleges mátrix . Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{26}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Ha B olyan pozitív definit (ill. nem pozitív szemidefinit) mátrix, melyre $A^TB + BA$ negatív definit, akkor a Q_B függvény teljesíti Ljapunov stabilitási (instabilitási) tételének feltételeit (a (26) differenciálegyenlet 0 egyensúlyi pontjára vonatkozóan). Érdekes módon egy adott B mátrix esetén nem könnyű eldönteni az $A^TB + BA$ mátrix definitását, de fordítva egyszerűbb eljárni. Azaz választunk egy C negatív definit mátrixot, majd keresünk olyan B mátrixot, melyre $A^TB + BA = C$. Jelölje ezért $L_A : \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \to \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ azt a lineáris leképezést, melyre $L_AB = A^TB + BA$.

14. Lemma. *Ha minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ sajátértékre $\lambda_1 + \lambda_2 \ne 0$ (lehet $\lambda_1 = \lambda_2$ is), akkor L_A izomorfizmus.*

33. Tétel. (Kvadratikus Ljapunov függvény lineáris rendszerhez)

1. *Ha minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén $\mathrm{Re}\lambda < 0$, akkor bármely C negatív definit szimmetrikus mátrixhoz van olyan B pozitív definit szimmetrikus mátrix, melyre $A^TB + BA = C$, azaz Q_B Ljapunov függvény a (26) rendszerhez.*
2. *Ha van olyan $\lambda \in \sigma(A)$, melyre $\mathrm{Re}\lambda \ge 0$, és minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ sajátértékre $\lambda_1 + \lambda_2 \ne 0$ akkor bármely C negatív definit szimmetrikus mátrixhoz van olyan B nem pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, melyre $A^TB + BA = C$, azaz Q_B Ljapunov függvény a (26) rendszerhez.*

9. Megjegyzés. A tétel "szépséghibája" a (2) részben a " minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ sajátértékre $\lambda_1+\lambda_2 \neq 0$" feltétel. Nyilvánvalóan ez a B mátrix létezéséhez szükséges, ugyanis ha már van egy B mátrix, melyre $A^T B + BA = C$, akkor az biztosan nem pozitív szemidefinit. Könnyen látható, hogy ez a feltétel valóban szükséges, azaz van olyan mátrix, melyhez nincs olyan B, hogy $A^T B + BA = C$. Ez azonban nem befolyásolja az egyensúlyi pont instabilitását, ezért van szükség az alábbi lemmában az A mátrix egy kis módosítására.

15. Lemma. *Ha van olyan $\lambda_0 \in \sigma(A)$, melyre $\mathrm{Re}\lambda_0 > 0$, akkor létezik olyan $\eta > 0$, hogy bármely $\alpha \in (0, \eta)$ és C negatív definit szimmetrikus mátrix esetén van olyan B_α nem pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, melyre*

$$(A^T - \frac{\alpha}{2}I)B_\alpha + B_\alpha(A - \frac{\alpha}{2}I) = C$$

Most kvadratikus Ljapunov függvény segítségével bebizonyítjuk a 28 Tétel 2. részét. (Az 1. rész is igazolható Ljapunov függvénnyel, de azt már igazoltuk közvetlenül, így azzal most itt nem foglalkozunk.)
Tétel 28 2. bizonyítása. Használni fogjuk a tételben szereplő jelöléseket. Amint ott láttuk elegendő igazolni a (22) differenciálegyenlet 0 megoldásának instabilitását. Vezessük be a $g(p) = Ap + a(p)$, $(p \in \mathbf{R}^n)$ jelölést. Legyen C egy tetszőleges negatív definit szimmetrikus mátrix. Válasszunk az előző lemma szerint egy $\alpha > 0$ számot és egy B_α nem pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrixot. Legyen $B = B_\alpha$. Megmutatjuk, hogy a $V = Q_B$ függvény kielégíti a 32 Tétel feltételeit, ami igazolja a kívánt instabilitást. Az 1. feltétel nyilván teljesül, mert B nem pozitív szemidefinit. Felhasználva az $A^T B + BA = C + \alpha B$ egyenlőséget

$$(L_g Q_B)(q) = \langle (A^T B + BA)q, q\rangle + 2\langle Bq, a(q)\rangle = \langle Cq, q\rangle + 2\langle Bq, a(q)\rangle + \alpha\langle Bq, q\rangle.$$

Válasszunk egy $\gamma > 0$ számot a 18 Állítás 3. része szerint. A (21) alapján van az origónak olyan U környezete, melyben minden $q \in U$ pontra

$$|a(q)| \leq \frac{\gamma}{4\|B\|}|q|.$$

Ekkor

$$\langle Cq, q\rangle + 2\langle Bq, a(q)\rangle \leq -\gamma|q|^2 + 2\|B\|\frac{\gamma}{4\|B\|}|q|^2 = -\frac{\gamma}{2}|q|^2.$$

Így

$$(L_g Q_B)(q) - \alpha Q_B(q) = \langle Cq, q\rangle + 2\langle Bq, a(q)\rangle \leq 0$$

minden $q \in U$ pontra, azaz teljesül a 32 Tétel 2. feltétele is, amit bizonyítani akartunk.

5. Aszimptotikus viselkedés

Legyen $M \subset \mathbf{R}^n$ tartomány, $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ dinamikai rendszer. Az aszimptotikus viselkedés hosszútávú viselkedést jelent. Azt fogjuk vizsgálni, hogy $t \to +\infty$ esetén mi történik a pályákkal, milyen halmazhoz közelednek valamilyen értelemben. A kérdésfeltevésből következik, hogy elsősorban az olyan pályák érdekesek, melyek $t \to +\infty$ esetén korlátosak maradnak. Speciális esetként érdemes az aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontra gondolni, hiszen ennek egy környezetéből induló pályák hozzá tartanak. Amint látni fogjuk, egydimenziós rendszerben más típusú aszimptotikus viselkedés nem fordulhat elő, kétdimenziós rendszerben egy pálya tarthat egy periodikus megoldáshoz is (valamilyen értelemben), több dimenziós rendszerekben ennél bonyolultabb (ún. kaotikus) aszimptotikus viselkedés is előfordulhat. Ebben a szakaszban célunk kettős. Egyrészt egy pálya halmazhoz tartásának fogalmát szeretnénk definiálni (azaz pontosan megfogalmazni, hogy mit értünk az aszimptotikus viselkedés alatt). Másrészt szeretnénk meghatározni, hogy egy pálya milyen típusú halmazhoz tarthat (azaz milyen lehet az aszimptotikus viselkedés). Mivel ez a kérdés még kettőnél magasabb dimenziós rendszerek esetén nincs megoldva, azért a halmazhoz tartás fogalmára sincs végleges definíció, így itt is többféle definíciót fogunk ismertetni.

5.1. Az ω-határhalmaz fogalma és tulajdonságai

19. Definíció. A $q \in M$ pontot a $p \in M$ pont *ω-határpontjának (α-határpontjának)* nevezik, ha van olyan $t_n \to +\infty$ ($t_n \to -\infty$) sorozat, melyre $q = \lim \phi(t_n, p)$. A p pont ω, illetve α-határpontjainak halmazát *ω-határhalmaznak*, illetve *α-határhalmaznak* nevezik, jelölje ezeket $\omega(p)$, illetve $\alpha(p)$.

10. Megjegyzés. Egy pálya minden pontjának ugyanaz az ω-határhalmaza (és α-határhalmaza is).

34. Tétel. (Az ω-határhalmaz tulajdonságai) *Legyen $p \in M$ tetszőleges. Ekkor*

1. *$\omega(p)$ zárt.*
2. *$\omega(p)$ invariáns.*
3. *Ha $\{\phi(t,p) : t \geq 0\}$ korlátos, akkor $\omega(p) \neq \emptyset$*
4. *Ha $\{\phi(t,p) : t \geq 0\}$ korlátos, akkor $\omega(p)$ összefüggő.*

11. Megjegyzés. Ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkezik egy pont α-határhalmaza is.

5.2. Az ω-határhalmazok felépítése, Poincaré-Bendixson elmélet

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy egy és kétdimenziós rendszerekben milyen lehet egy pont ω-határhalmaza.

19. Állítás. *Legyen $M \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum. Minden $p \in M$ esetén léteznek a*

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t,p) \quad \text{és} \quad \lim_{t \to -\infty} \phi(t,p)$$

határértékek, ezért $\omega(p) = \emptyset$, vagy $\omega(p) = \{q\}$, ahol $q \in M$ egyensúlyi pont.

35. Tétel. (Poincaré-Bendixson) *Legyen $M \subset \mathbf{R}^2$ tartomány, $K \subset M$ pozitívan invariáns kompakt halmaz, melyben véges sok egyensúlyi pont van. Ekkor egy $p \in K$ pont ω-határhalmaza az alábbi három típus valamelyikébe tartozik:*

1. *$\omega(p)$ egy egyensúlyi pont.*
2. *$\omega(p)$ egy periodikus pálya.*
3. *$\omega(p)$ néhány egyensúlyi pont ($p_1, \dots, p_n$) és olyan γ pályák uniója, melyekre $\omega(\gamma) = p_i$ és $\alpha(\gamma) = p_j$.*

A tétel bizonyításához bevezetjük a transzverzális metszet fogalmát, valamint felhasználjuk a következő állítást és két lemmát.

20. Definíció. Egy $\Sigma \subset K$ szakaszt *transzverzális metszetnek* nevezünk, ha $\langle \nu, \partial_t \phi(0,p) \rangle \neq 0$ minden $p \in \Sigma$ pontra, ahol ν a Σ normálvektorát jelöli.

20. Állítás. *Legyen $\Sigma \subset K$ egy zárt transzverzális metszet.*

1. *Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Minden $p \in \mathrm{int}\Sigma$ pontnak van olyan $U \subset K$ nyílt környezete, hogy az abból induló megoldások ε-nál kevesebb időn belül metszik a Σ szakaszt, pontosabban minden $q \in U$ ponthoz van olyan $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, melyre $\phi(t,q) \in \Sigma$.*
2. *Létezik olyan $\delta > 0$, hogy a Σ szakaszról induló megoldások $t \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ időpontokban nem metszik a Σ szakaszt, azaz $\Sigma \cap \{\phi(t,p) : t \in [-\delta, \delta]\} = \{p\}$, minden $p \in \Sigma$ esetén.*

16. Lemma. *Legyen $\Sigma \subset K$ egy zárt transzverzális metszet, és $p \in K$.*

1. *Ha $0 < t_1 < t_2 < \dots$ olyanok, hogy $\phi(t_i, p) \in \Sigma$, akkor a (t_n) sorozat csak végtelenben torlódhat, és a $\phi(t_i, p)$ pont a $\phi(t_{i-1}, p)$ és $\phi(t_{i+1}, p)$ között van a Σ szakaszon.*
2. *$\omega(p) \cap \Sigma$ legfeljebb egy pontból áll.*
3. *Ha Γ periodikus pálya és $\Gamma \subset \omega(p)$, akkor $\Gamma = \omega(p)$.*

17. Lemma. (Gyenge Poincaré-Bendixson tétel) *Legyen $p \in K$. Ha $\omega(p)$ nem tartalmaz egyensúlyi pontot, akkor $\omega(p)$ egy periodikus pálya.*

5.3. Vonzó halmaz, attraktor

Legyen ismét $M \subset \mathbf{R}^n$ egy tartomány, és $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer. $t \in \mathbf{R}$, és $H \subset M$ esetén legyen $\phi_t(H) = \{\phi(t,p) : p \in H\}$. Egy U halmazt az A halmaz környezetének nevezünk, ha U az $\overline{A}$ minden pontjának környezete.

21. Definíció. Egy $A \subset M$ nemüres, zárt, invariáns halmazt *(egyenletesen) vonzó halmaznak* nevezünk, ha van olyan $U \subset M$ környezete, melyre

1. $\phi_t(U) \subset U$, ha $t \geq 0$.
2. Az A bármely V környezetéhez van olyan $T > 0$, hogy $\phi_t(U) \subset V$, ha $t \geq T$.

Az

$$\bigcup_{t \leq 0} \phi_t(U)$$

halmazt az A *vonzási tartományának, vagy medencéjének* nevezzük.

12. Megjegyzés. A halmaz nem egyenletesen vonzó, ha nem adható meg az U összes pontjához egyetlen közös T, azaz 2. helyett:

2^* Az A bármely V környezetéhez és minden $p \in U$ ponthoz van olyan $T > 0$, hogy $\phi(t,p) \in V$, ha $t \geq T$.

A vonzási tartomány látszólag függ az U környezet megválasztásától, valójában azonban a következő állítás szerint nem.

21. Állítás. *Az A vonzási tartománya azon pontokat tartalmazza, amelyekből induló megoldás az A halmazhoz tart, azaz*

$$\bigcup_{t \leq 0} \phi_t(U) = \{p \in M : \text{ Az } A \text{ bármely } V \text{ környezetéhez van olyan } T > 0, \text{ hogy } \phi(t,p) \in V, \text{ ha } t \geq T\ \}$$

22. Állítás. *Legyen $p \in M$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont. Ekkor $A = \{p\}$ vonzó halmaz.*

22. Definíció. A $p \in M$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontot *globálisan stabilisnak* nevezik, ha vonzási tartománya M.

23. Definíció. Egy $A \subset M$ vonzó halmazt *attraktornak* nevezünk, ha tartalmaz olyan pályát, amely benne mindenütt sűrű.

23. Állítás. (Vonzó halmaz létezése) *Legyen $F \subset M$ kompakt pozitívan invariáns halmaz ($\phi_t(F) \subset F$, ha $t \geq 0$), melynek van olyan $U \subset M$ környezete, hogy $\phi_\tau(U) \subset F$, valamely $\tau > 0$ számra. Ekkor*

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(F)$$

vonzó halmaz.

Bizonyítás.

1. Az A halmaz egy kompakt halmazokból álló monoton fogyó sorozat metszete, így zárt, és nem üres.

2. Felhasználva, hogy minden $t \geq 0$ esetén $\phi_t(F) \subset F$, könnyen látható, hogy A invariáns, azaz tetszőleges $p \in A$ és $t^* \in \mathbf{R}$ esetén $\phi(t^*, p) \in \phi_t(F)$, ha $t \geq 0$. Ugyanis $p \in A$ esetén minden $t^{**} \in \mathbf{R}$ számra $\phi(t^{**}, p) \in F$.

3. Legyen

$$U^* = \bigcup_{s \geq 0} \phi_s(U) \left(= \bigcup_{\tau \geq s \geq 0} \phi_s(U) \right)$$

Ekkor nyilván U^* olyan környezete az A halmaznak, melyre $\phi_t(U^*) \subset U^*$, ha $t \geq 0$. Ezenkívül látható, hogy $\phi_\tau(U^*) \subset F$.

4. Legyen V környezete az A halmaznak. Először megmutatjuk, hogy van olyan $t_1 > 0$, melyre $\phi_{t_1}(F) \subset V$. Ugyanis, ha nem lenne ilyen t_1, akkor lenne olyan p_n sorozat, melyre $p_n \in \phi_n(F) \setminus V$. F kompaktsága miatt ennek lenne egy $p \in F$ ponthoz tartó (szintén p_n-nel jelölt) részsorozata. Ekkor nyilván $p \in A$, így mivel V környezete az A halmaznak, azért létezne olyan N, melyre $p_N \in V$, ami ellentmond annak, hogy $p_N \in \phi_N(F) \setminus V$. Tehát $\phi_{t_1}(F) \subset V$, ezért $\phi_\tau(U^*) \subset F$ miatt $\phi_t(U^*) \subset V$, ha $t \geq \tau + t_1$.

6. Periodikus megoldások stabilitásvizsgálata

6.1. A Poincaré-leképezés

Legyen $M \subset \mathbf{R}^n$ egy tartomány és legyen $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ egy dinamikai rendszer. Legyen $p \in M$ periodikus pont T periódussal ($\phi(T,p) = p$). Jelölje $\gamma(t) := \phi(t,p)$ és $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [0,T]\}$.

24. Definíció. Legyen $L \subset \mathbf{R}^n$ egy $n-1$ dimenziós hipersík ν normálvektorral. Egy $\Sigma \subset L$ összefüggő halmazt *transzverzális metszetnek* nevezünk, ha $\langle \nu, \partial_t \phi(0,q) \rangle \neq 0$ minden $q \in \Sigma$ pontra.

Legyen Σ egy p pontot belsejében tartalmazó transzverzális metszet.

24. Állítás. (Poincaré-leképezés létezése) *A p pontnak van olyan $U \subset \Sigma$ környezete, és létezik olyan $\Theta : U \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre $\Theta(p) = T$ és $\phi(\Theta(q), q) \in \Sigma$, minden $q \in U$ pontra.*

25. Definíció. A $P : U \to \Sigma$, $P(q) = \phi(\Theta(q), q)$ függvényt a (Σ transzverzális metszethez tartozó) *Poincaré-leképezésnek* nevezik.

A Poincaré-leképezés függ a p pont és a Σ transzverzális metszet választásától. A következő állítás szerint a különböző Poincaré-leképezések koordináta-transzformációval egymásba vihetők.

25. Állítás. *Legyenek $p_1, p_2 \in \Gamma$, Σ_1, Σ_2 ezeket tartalmazó transzverzális metszetek, $U_i \subset \Sigma_i$ $(i = 1,2)$ nyílt halmazok, melyeken értelmezve vannak a $P_i : U_i \to \Sigma_i$ $(i = 1,2)$ Poincaré-leképezések. Ekkor van a p_1 pontnak olyan $V \subset U_1$ környezete, és $S : V \to U_2$ differenciálható függvény, melyre $P_2(S(p)) = S((P_1(p))$ minden $p \in V$ esetén.*

3. Következmény. *A $P_1'(p_1)$ és $P_2'(p_2)$ mátrixok sajátértékei megegyeznek.*

Ha $P(U) \subset U$, akkor a P Poincaré-leképezés az U halmazon egy $\psi : \mathbf{N} \times U \to U$ diszkrét dinamikai rendszert (pontosabban ún. szemidinamikai rendszert) határoz meg a következőképpen: $\psi(n,q) = P^n(q)$, ahol $P^n = P \circ P \circ \ldots \circ P$ az n tagú kompozíciót jelöli. (Azért nevezik szemidinamikai rendszernek, mert negatív n-ekre nincs értelmezve.) Mivel $P(p) = p$, azért a p pont a ψ dinamikai rendszernek egyensúlyi pontja. Látni fogjuk, hogy ennek stabilitása határozza meg a Γ pálya stabilitását, ezért most külön foglalkozunk a diszkrét dinamikai rendszerek fixpontjának stabilitásvizsgálatával.

6.2. Diszkrét dinamikai rendszer fixpontjának stabilitásvizsgálata

Legyen $G \subset \mathbf{R}^k$ nyílt halmaz, $g : G \to G$ diffeomorfizmus (olyan differenciálható függvény, melynek létezik inverze, és az is differenciálható). Ez a függvény a G halmazon meghatároz egy $\psi : \mathbf{Z} \times G \to G$ diszkrét dinamikai rendszert a következőképpen: $\psi(n,q) = g^n(q)$, ahol $g^n = g \circ g \circ \ldots \circ g$ az n tagú kompozíciót jelöli, ha $n \in \mathbf{N}$. Ha $n < 0$, akkor legyen $g^n = g^{-1} \circ g^{-1} \circ \ldots \circ g^{-1}$ $-n$ tagú kompozíció. Könnyen látható, hogy ψ egy dinamikai rendszer. A rövidség kedvéért helyette a g^n jelölést fogjuk használni.

26. Definíció. A $p \in G$ pontot a ψ dinamikai rendszer *egyensúlyi pontjának, vagy fixpontjának* nevezzük, ha $g(p) = p$ (azaz $\psi(n,p) = p$, minden $n \in \mathbf{Z}$ esetén).

27. Definíció. A p fixpontot *stabilisnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|q-p| < \delta$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén $|g^n(q) - p| < \varepsilon$.

A p fixpontot *aszimptotikusan stabilisnak* nevezzük, ha stabilis, és $|q-p| < \delta$ esetén $\lim_{n\to\infty} g^n(q) = p$.

A fixpont stabilitása a folytonos dinamikai rendszerhez hasonlóan linearizálással dönthető el. Ehhez szükség van az alábbi lemmára.

18. Lemma. *Legyen $A \in \mathbf{R}^{k\times k}$ tetszőleges mátrix, $\alpha > 0$ olyan, hogy $|\lambda| < \alpha$ minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén. Ekkor megadható olyan bázis $\mathbf{R}^k$-ban, hogy az általa meghatározott $\|\cdot\|_2$ normában*

$$\|Ap\|_2 \leq \alpha \|p\|_2 \quad \text{minden} \quad p \in \mathbf{R}^k$$

36. Tétel. (Fixpont stabilitása) *Ha a $g'(p)$ mátrix minden λ sajátértékére $|\lambda| < 1$, akkor a p fixpont aszimptotikusan stabilis.*

6.3. Periodikus megoldás stabilitása

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a Poincaré-leképezés fixpontjának stabilitása hogyan határozza meg a Γ pálya stabilitását. Könnyen látható, hogy egy periodikus megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis, mégis mint halmazhoz tarthatnak hozzá egy környezetéből a megoldások (lehet ω-határhalmaz, vagy attraktor). Ezért a periodikus megoldás stabilitásának leírására bevezetjuk az orbitális stabilitás fogalmát. Használni fogjuk a pontok Γ pályától való távolságára az alábbijelölést:

$$\mathrm{d}(q, \Gamma) = \inf\{|q - \gamma(t)| : t \in [0, T]\}$$

28. Definíció. A γ periodikus megoldás *orbitálisan stabilis*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, melyre $\mathrm{d}(q, \Gamma) < \delta$ és $t \geq 0$ esetén $\mathrm{d}(\phi(t,q), \Gamma) < \varepsilon$.

A γ periodikus megoldás *orbitálisan aszimptotikusan stabilis*, ha orbitálisan stabilis és

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{d}(\phi(t,q), \Gamma) = 0.$$

A Γ pálya *határciklus*, ha van olyan $q \notin \Gamma$ pont, melyre $\Gamma \subset \omega(q)$, vagy $\Gamma \subset \alpha(q)$.

A Γ pálya *stabil határciklus*, ha γ orbitálisan aszimptotikusan stabilis.

Legyen Σ egy p pontot tartalmazó transzverzális metszet, $U \subset \Sigma$ a p pont környezete, $P : U \to \Sigma$ a Poincaré-leképezés.

37. Tétel. *Ha p (aszimptotikusan) stabilis fixpontja a P Poincaré leképezésnek, akkor γ orbitálisan (aszimptotikusan) stabilis.*

Bizonyítás.

Legyen $r > 0$ olyan, hogy $\Sigma \cap \overline{B_r(p)} \subset U$, és $K := \{q \in \mathbf{R}^n : d(q,\Gamma) \leq r\} \subset M$. Legyen az f Lipschitz konstansa a K halmazon L, és legyen $T^* := max\{\Theta(q) : q \in \Sigma \cap \overline{B_r(p)}\}$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A p pont stabilitása miatt létezik olyan $\delta_1 \in (0, r)$, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ esetén $|P^n(q) - p| < \frac{\varepsilon}{e^{LT^*}}$, ha $|q - p| < \delta_1$ (P^n a P leképezés n-szeri alkalmazását jelenti). A Poincaré leképezés létezésének bizonyításában használt implicit függvény tételes módszerrel adódik olyan $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ létezése, hogy bármely $q \in B_{\delta_2}(p)$ ponthoz van olyan τ, melyre $\phi(\tau, q) \in \Sigma$ és $\phi(t, q) \in B_{\delta_1}(p)$, minden $t \in [0, \tau]$ esetén. Legyen $\delta := \frac{\delta_2}{e^{LT}}$ és legyen $q \in M$ olyan pont, melyre $d(q, \Gamma) < \delta$. Megmutatjuk, hogy minden $t \geq 0$ esetén $d(\phi(t,q), \Gamma) < \varepsilon$. Mivel $d(q, \Gamma) < \delta$, azért létezik olyan $t' \in [0, T)$, melyre $|q - \phi(t', p)| < \delta$. Ekkor a Peano-egyenlőtlenség szerint $|\phi(T - t', q) - \phi(T, p)| < \delta e^{L(T-t')} < \delta_2$, így létezik τ', hogy $\phi(T - t' + \tau', q) \in \Sigma \cap B_{\delta_1}(p)$. Jelölje $t_0 := T - t' + \tau'$, és legyenek $t_0 < t_1 < ... < t_n < ...$ olyanok, hogy $P^n(\phi(t_0, q)) = \phi(t_n, q)$. Mivel $|\phi(t_0, q) - p| < \delta_1$ és a p pont stabilis, azért $|\phi(t_n, q) - p| < \frac{\varepsilon}{e^{LT^*}}$, minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen most $\tau \in [0, T^*]$ tetszőleges, ekkor minden $n \in \mathbf{N}$ esetén a Peano-egyenlőtlenség szerint $|\phi(t_n + \tau, q) - \phi(\tau, p)| < \frac{\varepsilon}{e^{LT^*}} e^{L\tau} \leq \varepsilon$, azaz minden $t \geq 0$ számra $\mathrm{d}(\phi(t,q), \Gamma) < \varepsilon$, ami éppen azt jelenti, hogy γ orbitálisan stabilis. Ha a p pont aszimptotikusan stabilis, akkor $|\phi(t_n, q) - p| \to 0$, és ismét a Peano-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy $lim_{t\to\infty}\mathrm{d}(\phi(t,q), \Gamma) = 0$, azaz γ orbitálisan aszimptotikusan stabilis.

29. Definíció. A $P'(p)$ ($(n-1)\times(n-1)$-es) mátrix sajátértékeit a Γ periodikus pálya *karakterisztikus multiplikátorainak* nevezik.

A 3 Következmény szerint a karakterisztikus multiplikátorok nem függenek a Poincaré leképezés választásától. A 36 Tétel szerint pedig jellemzik a fixpont stabilitását.

38. Tétel. (Andronov-Witt)
Ha a Γ periodikus pálya karakterisztikus multiplikátorainak abszolútértéke 1-nél kisebb, akkor a Γ pálya stabil határciklus.

6.4. Floquet elmélet, a karakterisztikus multiplikátorok meghatározása

Ebben a szakaszban a periodikus megoldás stabilitását nem a Poincaré leképezés segítségével, hanem a differenciálegyenlet linearizálásával vizsgáljuk. Ezért most nem a ϕ dinamikai rendszerből, hanem az

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{27}$$

differenciálegyenletből indulunk ki ($f : M \to \mathbf{R}^n$ differenciálható függvény). A megoldást szokásos módon jelölje $\phi : \mathbf{R}\times M \to M$. Legyen $p \in M$ periodikus pont T periódussal ($\phi(T,p) = p$), és legyen $\gamma(t) := \phi(t,p)$. Formálisan linearizáljuk a (27) differenciálegyenletet a γ megoldás mentén. Bevezetve az $y(t) = x(t) - \gamma(t)$ jelölést, az f differenciálhatósága miatt

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\gamma}(t) = f(x(t)) - f(\gamma(t)) = f(\gamma(t) + y(t)) - f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))y(t) + a(t, y(t))$$

Tehát a linearizálással kapott egyenlet:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t), \tag{28}$$

ahol $A(t) = f'(\gamma(t))$.

Most azt fogjuk vizsgálni, hogy a (28) azonosan 0 megoldásának stabilitása hogyan függ össze a (27) egyenlet γ megoldásának orbitális stabilitásával. Ugyanúgy, ahogy a γ megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis, a (28) azonosan 0 megoldása sem lehet aszimptotikusan stabilis, mert van egy periodikus megoldás : $\dot{\gamma}(t)$. (Ez a (27) deriválásával azonnal látszik.) Mégis a (28) differenciálegyenlet valamilyen értelemben vett stabilitásából lehet a γ megoldás orbitális stabilitására következtetni. Ehhez először vizsgáljuk meg általában a (28) differenciálegyenlet megoldásait.

Legyen most $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ tetszőleges folytonos, T periodikus függvény. A (28) egy homogén lineáris differenciálegyenlet, így megoldásai kifejezhetők egy $\Psi(t)$ alapmátrix segítségével (az alapmátrixra $\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t)$). Legyen most Ψ az az alapmátrix, melyre $\Psi(0) = I$. Emlékeztetünk arra, hogy az állandó együtthatós esetben ezt az alapmátrixot meg tudtuk adni (e^{At}). Most nem tudjuk explicit módon megadni, mégis Floquet tétele jó jellemzést ad róla. Ehhez szükség van az alábbi lemmára.

19. Lemma. *Legyen $C \in \mathbf{R}^{n\times n}$ olyan mátrix, melyre $\det C \neq 0$. Ehhez van olyan $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrix, melyre $\mathrm{e}^B = C^2$. (Van olyan $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ mátrix is, melyre $\mathrm{e}^B = C$.)*

39. Tétel. (Floquet) *Van olyan $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrix, és $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ folytonos, $2T$ periodikus függvény, hogy a fenti alapmátrix előáll*

$$\Psi(t) = L(t)\cdot \mathrm{e}^{Bt}$$

alakban. (Komplex B és L esetén az L függvény T periodikus.)

4. Következmény. *Ha minden $\mu \in \sigma(\Psi(T))$ sajátértékre $|\mu| < 1$, akkor a (28) azonosan 0 megoldássa aszimptotikusan stabilis.*

13. Megjegyzés. Ez a következmény a γ stabilitásának igazolására nem alkalmas, mert mint említettük $\dot{\gamma}(t)$ periodikus megoldása a (28) differenciálegyenletnek, és ebből adódik, hogy a $\dot{\gamma}(0)$ vektor sajátvektora a $\Psi(T)$ mátrixnak 1 sajátértékkel. Azonban mindjárt látni fogjuk, hogy a γ megoldás orbitális aszimptotikus stabilitásához elegendő az, hogy a $\Psi(T)$ mátrix többi sajátértékének abszolútértéke 1-nél kisebb.

40. Tétel. *Legyen P egy Poincaré-leképezés valamely p pontot tartalmazó transzverzális metszeten. Ekkor $\sigma(\Psi(T)) = \sigma(P'(p)) \cup \{1\}$.*

Bizonyítás. Jelölje $H := \{v \in \mathbf{R}^n : \langle v, \dot\gamma(0)\rangle = 0\}$ a $\dot\gamma(0)$ vektorra merőleges $n-1$ dimenziós alteret. Legyen ebben egy bázis $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. A kívánt állításnál többet bizonyítunk, ha belátjuk, hogy $\Psi(T)$ mátrixa a $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, \dot\gamma(0)\}$ bázisban olyan, hogy a bal felső $(n-1) \times (n-1)$ méretű rész éppen a $P'(p)$ mátrix, az utolsó oszlop pedig $(0, \ldots, 0, 1)^T$.

Ehhez először megmutatjuk, hogy $\Psi(T)\dot\gamma(0) = \dot\gamma(0)$. Ugyanis mivel γ megoldása a differenciálegyenletnek, azért $\dot\gamma(t) = f(\gamma(t))$, ezt deriválva $\ddot\gamma(t) = f'(\gamma(t))\dot\gamma(t)$, azaz $\dot\gamma$ megoldása a linearizált egyenletnek. Ez utóbbi megoldásai kifejezhetők az alapmátrix segítségével, így $\dot\gamma(t) = \Psi(t)\dot\gamma(0)$, ezért γ periodikussága miatt $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(T) = \Psi(T)\dot\gamma(0)$.

Jelölje $\Phi(t) := (q \to \phi(t, q))'(p)$. A differenciálható függésről szóló 10. Tétel szerint $\dot\Phi(t) = f'(\gamma(t))\Phi(t)$, azaz $\Phi(t)$ is alapmátrixa a linearizált egyenletnek. Azonban $\Phi(0) = (q \mapsto \phi(0, q))'(p) = I$ miatt $\Phi(t) = \Psi(t)$.

Legyen $\overline{P}$ a p egy n-dimenziós környezetén értelmezett Poincaré leképezés. Ekkor a fenti bázisban a $\overline{P}'(p)$ mátrix bal felső $(n-1) \times (n-1)$ méretű része éppen a $P'(p)$ mátrix. Differenciálva a $\overline{P}(q) = \phi(\overline{\Theta}(q), q)$ Poincaré leképezést

$$\overline{P}'(p) = \dot\gamma(0)\overline{\Theta}'(p) + \Phi(T) = \dot\gamma(0)\overline{\Theta}'(p) + \Psi(T).$$

Mivel a fenti bázisban $\dot\gamma(0) = (0, \ldots, 0, 1)^T$, azért a $\dot\gamma(0)\overline{\Theta}'(p)$ mátrix bal felső $(n-1) \times (n-1)$ méretű része csupa 0-ból áll. Így a kívánt állítás a fenti egyenlőségből következik. □

5. Következmény. (Andronov-Witt) *Ha a $\Psi(T)$ mátrixnak az 1 egyszeres sajátértéke, és többi sajátértékének abszolútértéke 1-nél kisebb, akkor a γ megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabilis.*

14. Megjegyzés. Ez a következmény az Andronov-Witt tétel, amelyet most a Poincaré leképezés segítségével igazoltunk. Azonban a Floquet elmélet keretében anélkül, a $\Psi(T)$ mátrix sajátértékeinek vizsgálatával bizonyítják be. Ekkor természetesen a karakterisztikus multiplikátorokat a $\Psi(T)$ mátrix (1-en kívüli) sajátértékeiként vezetik be.

7. Dinamikai rendszerek topologikus osztályozása

A differenciálegyenletek elméletének fejlődése során először a differenciálegyenletek megoldásával foglalkoztak, igen sokféle módszert kifejlesztettek, amelyekkel speciális típusú differenciálegyenletek megoldása képlettel előállítható. Azonban kiderült, hogy differenciálegyenlet-rendszerek megoldása általában képlettel nem adható meg (szinte kizárólag csak a lineáris esetben), vagy ha megadható, akkor is nehézségekbe ütközhet, hogy a megoldás bizonyos fontos tulajdonságait a képlet alapján meghatározzuk. („Magyarul: nincs megoldóképlet, de ha van, akkor sem jó semmire.")

Kétdimenziós nemlineáris rendszerek megoldásait célszerű úgy vizsgálni, hogy a trajektóriákat (pályákat) ábrázoljuk a fázissíkon (ezt tettük a gyakorlaton). Ez nem azt jelenteti, hogy a megoldás görbéket pontosan felrajzoljuk, hanem az analízisbeli függvényvizsgálathoz hasonlóan járunk el, amikor csak a függvénygrafikon legfontosabb alaki tulajdonságait (monotonitás, konvexitás) vesszük figyelembe. A két dimenziós rendszerek megoldásainak ábrázolása során tehát lényegében egy a vizsgált rendszerrel valamilyen értelemben ekvivalens rendszer pályáit ábrázoltuk (mégpedig annak, amelynek pályái „úgy néznek ki", mint a vizsgálandó rendszer pályái). Most szeretnénk ezen ekvivalencia fogalmát pontosan meghatározni, azaz definiálni azt, hogy mit értünk azon, hogy „úgy néznek ki, mint...".

A továbbiakban tehát a $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ dinamikai rendszerek halmazán meg fogunk adni egy ekvivalenciarelációt. Azután az a cél, hogy meghatározzuk a lehetséges osztályokat, keressünk minden osztályból egy könnyen vizsgálható reprezentánst, és egyszerű módszert adjunk arra, hogy eldönthessük egy adott rendszerről, hogy melyik osztályba tartozik.

30. Definíció. Legyenek $M, N \subset \mathbf{R}^n$ tartományok. A $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ és $\psi : \mathbf{R} \times N \to N$ dinamikai rendszereket *(orbitálisan) topologikusan ekvivalenseknek*, (rövidebben C^0-ekvivalenseknek) nevezik, ha van olyan $h : M \to N$ homeomorfizmus, amely a pályákat egymásba képezi az irányítás megtartásával, azaz létezik olyan $a : \mathbf{R} \times M \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, melyre $t \mapsto a(t, p)$ szigorúan növő szürjekció, és $h(\phi(t, p)) = \psi(a(t, p), h(p))$. Ha a h függvény C^k diffeomorfizmus (és az a is C^k), akkor a dinamikai rendszereket *C^k-ekvivalenseknek* nevezik. Ha a h függvény a pályákon az időt is megtartja (azaz $a(t, p) = t$ minden t esetén), akkor a dinamikai rendszereket *C^k-konjugáltaknak* ($k = 0$ esetén topologikusan konjugáltaknak) nevezik.

15. Megjegyzés. A fenti definíciók közül a topologikus ekvivalencia közelíti meg legjobban az "úgy néz ki, mint..." szemléletes fogalmat. Ugyanis belátható, hogy két lineáris rendszer, melyeknek nyeregpontja van, de a sajátértékek aránya különböző, nem C^k-ekvivalens $k > 0$ esetén, de topologikusan ekvivalens. Ezért a C^k-ekvivalencia $k > 0$ esetén túl erős fogalom. A topologikus konjugáltság szintén túl erős, ugyanis két lineáris rendszer, melynek centrum pontja van, de a két rendszerben a periodikus pályák periodusa különböző, nem topologikusan konjugált, de topologikusan ekvivalens.

A topologikus ekvivalencia sem felel meg teljesen, mert mint látni fogjuk egy csomóponttal, illetve egy fókuszponttal rendelkező lineáris rendszer egymással topologikusan ekvivalens.

A továbbiakban a topologikus ekvivalencia fogalmát fogjuk használni a dinamikai rendszerek osztályozására. Célunk a lehetséges osztályok meghatározása. Ez azonban egynél magasabb dimenziós rendszerekben kivitelezhetetlen, ezért célszerű a dinamikai rendszerek lokális viselkedését (egy pont környezetében) osztályozni.

31. Definíció. Legyenek M, N, ϕ, ψ olyanok, mint az előző definícióban, és legyenek $p \in M$, $q \in N$ tetszőleges pontok. A ϕ dinamikai rendszer a p pontban és a ψ dinamikiai rendszer a q pontban *lokálisan topologikusan ekvivalens*, ha van a p pontnak olyan U környezete, a q pontnak olyan V környezete, és $h : U \to V$ homeomorfizmus, melyre $h(p) = q$, és a pályákat egymásba képezi az irányítás megtartásával. Hasonlóan definiálható a *lokális C^k-ekvivalencia*, és a *lokális C^k-konjugáltság* is.

16. Megjegyzés. Ezek a definíciók a $C^1(M, \mathbf{R}^n)$ függvényeken, azaz a differenciálegyenletek halmazán is meghatároznak egy-egy ekvivalenciarelációt: két függvény, illetve két differenciálegyenlet topologikus ekvivalenciája az általuk meghatározott dinamikai rendszerek topologikus ekvivalenciáját jelenti.

Először megvizsgáljuk, hogy egy nem egyensúlyi pont környezetében milyen lehet egy dinamikai rendszer pályáinak viselkedése. Szemléletesen nyilvánvaló, hogy lokálisan a pályák egymással párhuzamos szakaszok, azaz csak egyféle viselkedés létezik. Ezt fejezi ki a kiegyenesítési tétel.

41. Tétel. (kiegyenesítési tétel) *Nem egyensúlyi pontban bármely két C^k dinamikai rendszer egymással lokálisan C^k-konjugált. Sőt tetszőleges f C^k függvényre az $\dot{x} = f \circ x$ differenciálegyenlet által meghatározott dinamikai rendszer egy tetszőleges nem egyensúlyi pontban, és az $\dot{y} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ differenciálegyenlet által meghatározott dinamikai rendszer a 0 pontban egymással lokálisan C^k-konjugált.*

Mielőtt rátérnénk az egyensúlyi pontok lokális osztályozására, a lineáris differenciálegyenletek topologikus osztályozását kell elvégeznünk.

7.1. Lineáris differenciálegyenletek topologikus osztályozása

32. Definíció. Az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ és a $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixokat *topologikusan ekvivalenseknek* (*topologikusan konjugáltaknak*) nevezzük, ha az $\dot{x} = Ax$ és az $\dot{x} = Bx$ differenciálegyenletek által meghatározott dinamikai rendszerek topologikusan ekvivalensek (topologikusan konjugáltak). Hasonlóan definiáljuk a C^k-ekvivalenciát és a C^k-konjugáltságot az A és B mátrixokra. Az A és B mátrixot *lineárisan ekvivalensnek* nevezzük, ha van olyan $\alpha > 0$, és $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix, melyre $\alpha A = P^{-1}BP$.

26. Állítás.

1. *Az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ és a $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixok pontosan akkor C^k-konjugáltak $k \geq 1$ esetén, ha hasonlók.*
2. *Az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ és a $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixok pontosan akkor C^k-ekvivalensek $k \geq 1$ esetén, ha lineárisan ekvivalensek.*

Jelölje az A mátrix pozitív, negatív, illetve 0 valósrészű sajáértékeinek számát multiplicitással $u(A)$, $s(A)$, és $c(A)$.

20. Lemma. *1. Ha $s(A) = n$, akkor az A mátrix topologikusan konjugált a $-I$ mátrixszal.*

2. Ha $u(A) = n$, akkor az A mátrix topologikusan konjugált az I mátrixszal.

Bizonyítás. (1) Négy lépésben bizonyítunk.
a. Az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenlet p pontból induló megoldása $x(t) = \mathrm{e}^{At}p$, az $\dot{y} = -y$ megoldása $y(t) = \mathrm{e}^{-t}p$. A kvadratikus Ljapunov függvényekről szóló tétel szerint létezik olyan $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ pozitív definit szimmetrikus mátrix, hogy a $Q_B(p) = \langle Bp, p\rangle$ kvadratikus alakra $L_A Q_B$ negatív definit. Jelölje $S := \{p \in \mathbf{R}^n : Q_B(p) = 1\}$.
b. Az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenlet bármely nem 0 megoldása pontosan egyszer metszi az S halmazt, azaz minden $p \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ponthoz létezik egyetlen $\tau(p) \in \mathbf{R}$, hogy $\mathrm{e}^{A\tau(p)}p \in S$. Ugyanis a $V^*(t) = Q_B(\mathrm{e}^{At}p)$ függvény minden $p \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ esetén szigorúan monoton fogyó, és $lim_{+\infty} V^* = 0$, $lim_{-\infty} V^* = +\infty$. Nyilván $\tau : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, valamint $\tau(\mathrm{e}^{At}p) = \tau(p) - t$.
c. A két rendszer pályáit egymásba képező homeomorfizmus legyen

$$h(p) := \mathrm{e}^{(A+I)\tau(p)}p, \quad \text{ha } p \neq 0, \quad \text{és } h(0) = 0.$$

Ez szemléletesen azt csinálja, hogy a p pontot elviszi az S halmazra az $\dot{x} = Ax$ pályáján, majd ezt a pontot ugyanannyi ideig ($\tau(p)$ ideig) visszaviszi az $\dot{y} = -y$ pályáján.
d. Igazoljuk, hogy h homeomorfizmus, és a pályákat egymásba képezi. Az utóbbi azt jelenti, hogy $h(\mathrm{e}^{At}p) = \mathrm{e}^{-t}h(p)$. Ez $p = 0$ esetén nyilvánvaló, $p \neq 0$ esetén pedig

$$h(\mathrm{e}^{At}p) = \mathrm{e}^{(A+I)\tau(\mathrm{e}^{At}p)}\mathrm{e}^{At}p = \mathrm{e}^{(A+I)(\tau(p)-t)}\mathrm{e}^{At}p = \mathrm{e}^{(A+I)\tau(p)}\mathrm{e}^{-t}p = \mathrm{e}^{-t}h(p).$$

Mivel $L_{-I}Q_B = Q_{-2B}$ negatív definit, azaz $\dot{y} = -y$ pályái az S halmazt csak egyszer metszik, azért h bijekció (az inverze is hasonlóan felírható). A τ fügvény folytonossága miatt h és h^{-1} is folytonos a 0 ponton kívül. Tehát már csak a 0-beli folytonosságot kell igazolni. Ehhez megmutatjuk, hogy

$$\lim_{p\to 0} \mathrm{e}^{\tau(p)}\mathrm{e}^{A\tau(p)}p = 0.$$

Mivel $\mathrm{e}^{A\tau(p)}p \in S$ és S korlátos, azért elég igazolni, hogy $\lim_{p\to 0}\tau(p) = -\infty$, azaz bámely T pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy legalább T idő kell amíg egy megoldás az S halmazról a $B_\delta(0)$ gömbbe eljut. Ehhez megmutatjuk, hogy létezik olyan $\gamma < 0$, hogy minden $p \in S$ pontra $\mathrm{e}^{\gamma t} \leq Q_B(\mathrm{e}^{At}p)$, azaz a megoldások nullához tartása alulról is korlátozott. (Nyilván ekkor $|\mathrm{e}^{At}p|$ is alulról becsülhető.) Legyen C az a negatív definit mátrix melyre $L_A Q_B = Q_C$. A C mátrix negatív, és a B mátrix pozitív definitása miatt létezik olyan $\alpha < 0$ és $\beta > 0$, hogy $Q_C(p) \geq \alpha|p|^2$ és $Q_B(p) \geq \beta|p|^2$ minden $p \in \mathbf{R}^n$ esetén. Jelölje $V^*(t) := Q_B(\mathrm{e}^{At}p)$ ($p \in S$ tetszőleges). Ekkor $\dot{V}^*(t) = Q_C(\mathrm{e}^{At}p)$, tehát $\dot{V}^*(t)Q_B(\mathrm{e}^{At}p) = V^*(t)Q_C(\mathrm{e}^{At}p)$, melyből $\beta\dot{V}^*(t) \geq \alpha V^*(t)$. Legyen $\gamma := \frac{\alpha}{\beta}$. Ekkor a kis Gronwall lemma szerint $V^*(t) \geq \mathrm{e}^{\gamma t}$, amit igazolni akartunk.

(2) Az állítás következik (1)-ből, ha azt a $-A$ mátrixra alkalmazzuk.

33. Definíció. Az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixot *hiperbolikusnak hívjuk*, ha $c(A) = 0$, azaz nincs 0 valósrészű sajátértéke.

42. Tétel. *Legyenek A és B hiperbolikus mátrixok. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek*

1. *$s(A) = s(B)$.*
2. *A és B topologikusan konjugáltak.*
3. *A és B topologikusan ekvivalensek.*
4. *A és B lokálisan topologikusan ekvivalensek.*

A nem hiperbolikus mátrixok osztályozása bonyolultabb, ezért csak bizonyítás nélkül közöljük az erre vonatkozó eredményt.

43. Tétel. (Kuiper 1973) *Legyenek $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ és $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ olyan mátrixok, melyekre $c(A) = c(B) = n$. A és B pontosan akkor topologikusan ekvivalensek, ha lineárisan ekvivalensek.*

6. Következmény. *Az $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ és $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixok pontosan akkor topologikusan ekvivalensek, ha $s(A) = s(B)$, $u(A) = u(B)$, és $A|_{E_c}$ lineárisan ekvivalens $B|_{F_c}$-vel, ahol E_c, illetve F_c a megfelelő centrális altereket jelöli.*

7.2. Egyensúlyi pontok lokális topologikus osztályozása

Legyen $M \subset \mathbf{R}^n$ tartomány, $f : M \to \mathbf{R}^n$ differenciálható függvény. Az $\dot{x} = f \circ x$ differenciálegyenlet egy $p \in M$ egyensúlyi pontjának környezetében igen bonyolult viselkedések fordulhatnak elő. A teljes osztályozás csak a hiperbolikus egyensúlyi pontokra ($c(f'(p)) = 0$) ismert.

44. Tétel. (Hartman-Grobman) *Ha $c(f'(p)) = 0$, akkor az $\dot{x} = f \circ x$ differenciálegyenlet a p pontban és az $\dot{y} = f'(p)y$ differenciálegyenlet a 0 pontban lokálisan topologikusan ekvivalensek. Azaz hiperbolikus egyensúlyi pontban a rendszer a saját lineáris részével lokálisan topologikusan ekvivalens.*

A tétel bizonyítása akkor egyszerű, ha már ismerjük a diszkrét dinamikai rendszerekre vonatkozó analóg tételt. Ezért azt most bizonyítás nélkül közöljük.

45. Tétel. (Hartman-Grobman tétel diszkrét dinamikai rendszerekre) *Legyen $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ differenciálható függvény, p ennek olyan fixpontja, melyre az $F'(p)$ mátrixnak nincs sajátértéke az egységkörön. Ekkor van a p pontnak olyan U környezete, és olyan $H : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ homeomorfizmus, melyre*

$$H(F(q)) = F'(q)H(q) \quad q \in U$$

Ezenkívül egyetlen olyan H van, melyre $H - id$ korlátos.

8. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Legyen $I \subset \mathbf{R}$ egy intervallum, $p \in C^1(I)$ egy pozitív, $q \in C(I)$ pedig egy tetszőleges függvény. Legyen L a következő másodrendű differenciáloperátor:

$$Lx := (p\dot{x})^{\cdot} + qx, \quad L : C^2(I) \to C(I) \tag{29}$$

Ebben a szakaszban az

$$Lx = f \tag{30}$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni. ($f \in C(I)$ egy tetszőleges függvény.) Ez a differenciálegyenlet látszólag speciális alakú, azonban egy tetszőleges explicit másodrendű lineáris differenciálegyenlet erre az alakra transzformálható. Ugyanis legyenek $g_1, g_2, h : I \to \mathbf{R}$ folytonos függvények, és tekintsük az

$$\ddot{x}(t) + g_1(t)\dot{x}(t) + g_2(t)x(t) = h(t)$$

másodrendű egyenletet. Jelöljük G-vel a g_1 egy primitív függvényét, és szorozzuk meg az egyenletet e^G-vel. Bevezetve a $p = e^G$, $q = g_2 e^G$, $f = he^G$ jelöléseket a (30) differenciálegyenletet kapjuk.

8.1. Peremérték-problémák

Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, és legyen most $I = [a, b]$. Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$ olyan számok, melyekre $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Legyenek $H_1, H_2 : C^1[a, b] \to \mathbf{R}$ az alábbi lineáris leképezések:

$$H_1 x := \alpha_1 x(a) + \beta_1 \dot{x}(a), \quad H_2 x := \alpha_2 x(b) + \beta_2 \dot{x}(b)$$

Legyenek $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R}$. A (30) differenciálegyenletet a

$$H_1 x = \eta_1, \quad H_2 x = \eta_2 \tag{31}$$

peremfeltételekkel *peremérték problémának* (PP) nevezik. A peremérték-probléma *homogén*, ha $f \equiv 0$ és $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

A (PP) megoldása 3 lépésben történhet:

1. A homogén egyenlet lineárisan független x_1, x_2 megoldásainak előállítása ($Lx_1 = Lx_2 = 0$).
2. Az $Lx = f$ inhomogén egyenlet egy x_0 megoldásának előállítása.
3. Olyan c_1, c_2 számok megadása, melyekkel az $x = x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2$ függvény megoldása a (PP)-nak.

A lépések végrehajtása hátulról kezdve egyre nehezedik. A 3. lépés egy két ismeretlenes algebrai egyenletrendszer megoldását jelenti (erről szól a következő tétel). A 2. lépéshez ismertetjük a Green függvény módszert. Az 1. lépés végrehajtásához nincs általános módszer (gyakorlaton megoldottunk speciális eseteket).

46. Tétel. *A (PP)-nak pontosan akkor létezik minden $f \in C[a,b]$ és minden $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R}$ esetén egyetlen megoldása, ha léteznek a homogén egyenletnek olyan lineárisan független x_1, x_2 megoldásai, melyekre*

$$\det \begin{pmatrix} H_1x_1 & H_1x_2 \\ H_2x_1 & H_2x_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az $Lx = f$ inhomogén egyenlet minden megoldása előáll $x = x_0 + c_1x_1 + c_2x_2$ alakban. A (PP)-nak pontosan akkor létezik egyetlen megoldása, ha egyetlen olyan (c_1, c_2) pár létezik melyre $H_i(x_0 + c_1x_1 + c_2x_2) = \eta_i$ $(i = 1, 2)$. Ennek az egyenlet-rendszernek pedig pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha a fenti determináns nem 0.

Térjünk rá a 2. lépés vizsgálatára.

21. Lemma. (Lagrange-azonosság) *Minden $u, v \in C^2[a,b]$ függvényre $vLu - uLv = (p(\dot{u}v - u\dot{v}))^{\cdot}$*

Bizonyítás. A deriválást elvégezve nyilvánvaló.

Ennek triviális következménye

7. Következmény. *Ha $Lx_1 = Lx_2 = 0$, akkor $p(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2)$ konstans függvény.*

47. Tétel. (Green-függvény) *Legyen $Lx_1 = Lx_2 = 0$ és $H_1x_1 = H_2x_2 = 0$. Jelölje $c := p(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)$. Legyen*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c}x_2(t)x_1(s), & \text{ha } a \le s \le t \\ \frac{1}{c}x_1(t)x_2(s), & \text{ha } t \le s \le b \end{cases}$$

Ekkor az $x_0(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$ függvényre $Lx_0 = f$, $H_1x_0 = H_2x_0 = 0$.

Bizonyítás. Az x_0 fügvényt

$$x_0(t) = \frac{1}{c}\left(x_2(t)\int_a^t x_1(s)f(s)\mathrm{d}s + x_1(t)\int_t^b x_2(s)f(s)\mathrm{d}s\right)$$

alakba írva deriválások után adódik az állítás.

8.2. Sturm-féle szeparációs tételek

Legyen most $I \subset \mathbf{R}$ egy tetszőleges nyílt intervallum, L pedig a (29) képlettel definiált differenciáloperátor. A jelen szakaszban tárgyalandó szeparációs tételek az $Lx = 0$ homogén egyenlet megoldásai gyökeinek elhelyezkedésével foglalkoznak.

22. Lemma. *Ha $Lx = 0$ és $x \not\equiv 0$, akkor x gyökei izoláltak.*

Bizonyítás. Legyen $t \in I$ egy gyök $(x(t) = 0)$. Ekkor $\dot{x}(t) \neq 0$, mert ellenkező esetben a megoldás egyértelműsége miatt $x \equiv 0$ lenne.

48. Tétel. *Legyenek $q_1, q_2 \in C(I)$ olyan függvények, melyekre $q_1 \le q_2$. Legyenek*

$$L_1x := (p\dot{x})^{\cdot} + q_1x \quad \text{és} \quad L_2x := (p\dot{x})^{\cdot} + q_2x.$$

Legyen $L_1\phi = 0$, t_1 és t_2 pedig a ϕ két egymást követő gyöke. Ha $q_1 \not\equiv q_2$ a (t_1, t_2) intervallumban, akkor $L_2\psi = 0$ esetén a ψ függvénynek van gyöke a (t_1, t_2) intervallumban.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\phi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\psi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban (a $\psi < 0$ eset hasonló). Legyen $A = p(\dot\phi\psi - \phi\dot\psi)$, ekkor $\dot A = (q_2 - q_1)\phi\psi$. Így

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi\psi = A(t_2) - A(t_1) = p(t_2)\dot\phi(t_2)\psi(t_2) - p(t_1)\dot\phi(t_1)\psi(t_1) \leq 0,$$

ami ellentmondás. (Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $\dot\phi(t_1) > 0$ és $\dot\phi(t_2) < 0$.)

49. Tétel. *Az $Lx = 0$ egyenlet lineárisan független megoldásainak gyökei elválasztják egymást.*

Bizonyítás. Legyen ϕ és ψ két lineárisan független megoldás. Legyen t_1 és t_2 a ϕ két egymást követő gyöke. Ismét feltehető, hogy $\phi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban, és tegyük fel megint indirekt módon, hogy $\psi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban. Ekkor az előbbi bizonyítást követve $p(t_2)\dot\phi(t_2)\psi(t_2) - p(t_1)\dot\phi(t_1)\psi(t_1) = 0$. Ez viszont a tagok előjelét figyelembe véve csak $\psi(t_1) = \psi(t_2) = 0$ esetén lehetséges. Ekkor a

$$\begin{pmatrix} \psi(t_1) \\ \dot\psi(t_1) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \phi(t_1) \\ \dot\phi(t_1) \end{pmatrix}$$

vektorok lineárisan összefüggenek. Ez a ϕ és ψ függvények lineáris összefüggőségét jelenti, ami ellentmond a feltételnek.

23. Lemma. *Legyenek $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ olyan folytonos függvények, melyek a második változójukban lokálisan Lipschitz tulajdonságúak, és $f \leq g$. Ha az x és y függvények megoldásai az $\dot x(t) = f(t, x(t))$, illetve $\dot y(t) = g(t, y(t))$ differenciálegyenleteknek, és $x(t_0) \leq y(t_0)$, akkor $x(t) \leq y(t)$ minden $t \geq t_0$ esetén.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan $t_2 \geq t_0$ szám, melyre $x(t_2) > y(t_2)$. Jelölje t_1 az utolsó t_2 előtti helyet, ahol x és y egyenlők (azaz $x(t) > y(t)$ minden $t \in (t_1, t_2)$ esetén). A kis Gronwall lemmát lehet alkalmazni az $u(t) = x(t) - y(t)$ függvényre a $[t_1, t_2]$ intervallumban, ugyanis

$$\dot u(t) = f(t, x(t)) - g(t, y(t)) \leq g(t, x(t)) - g(t, y(t)) \leq L(x(t) - y(t)).$$

A részleteket az olvasóra bízzuk.

50. Tétel. *Legyenek $q_1, q_2 \in C(I)$ és $p_1, p_2 \in C^1(I)$ olyan függvények, melyekre $q_1 \leq q_2$, $p_1 \geq p_2 > 0$, de $p_1 \not\equiv p_2$. Legyen*

$$L_1 x := (p_1 \dot x)^{\cdot} + q_1 x \quad \text{és} \quad L_2 x := (p_2 \dot x)^{\cdot} + q_2 x.$$

Legyen $L_1\phi = 0$, t_1 és t_2 pedig a ϕ két egymást követő gyöke. Ekkor $L_2\psi = 0$ esetén a ψ függvénynek van gyöke a $[t_1, t_2]$ intervallumban.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Prüfer transzformációt, amellyel az $Lx = 0$ egyenletből egy elsőrendű rendszert kapunk az alábbi kifejezésekkel definiált r és Θ új függvényekre:

$$x = r \sin\Theta, \qquad \dot x p = r \cos\Theta.$$

Deriválva ezeket, és felhasználva az $Lx = 0$ egyenletet az r és Θ függvényekre a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot r &= r(\frac{1}{p} - q) \sin\Theta \cos\Theta \\ \dot\Theta &= \frac{1}{p} \cos^2\Theta + q \sin^2\Theta \end{aligned}$$

Az $Lx = 0$ egyenlet valamely nem azonosan 0 x megoldásának t pontosan akkor gyöke, ha $\Theta(t) = n\pi$ valamely $n \in \mathbf{Z}$ esetén. Ugyanis a megoldás egyértelműsége miatt x és $\dot x$ egyszerre nem tűnhet el, tehát $r^2 = x^2 + \dot x^2 p^2 > 0$, így $\sin\Theta(t) = 0$. Ezenkívül $\Theta(t) = n\pi$ esetén $\dot\Theta(t) > 0$, mert $\cos^2 n\pi = 1$ és $p > 0$.

Legyen

$$f_1(t, \Theta) := \frac{1}{p_1} \cos^2\Theta + q_1 \sin^2\Theta \quad \text{és} \quad f_2(t, \Theta) := \frac{1}{p_2} \cos^2\Theta + q_2 \sin^2\Theta.$$

A feltételek szerint $f_1(t, \Theta) \leq f_2(t, \Theta)$. Jelölje Θ_1, illetve Θ_2 az $L_1 x = 0$, illetve $L_2 x = 0$ egyenletek Prüfer transzformációja során nyert függvényeket. Ekkor $\dot\Theta_1(t) = f_1(t, \Theta_1(t))$, és $\dot\Theta_2(t) = f_2(t, \Theta_2(t))$. Mivel t_1 és t_2 a ϕ két egymást követő gyöke, azért van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $\Theta_1(t_1) = n\pi$ és $\Theta_1(t_2) = (n+1)\pi$. Feltehető, hogy $n\pi \leq \Theta_2(t_1) < (n+1)\pi$, mert a Θ-ra vonatkozó egyenlet π szerint periodikus. Az előző lemma szerint $\Theta_2(t_2) \geq \Theta_1(t_2)$, így van olyan $t \in [t_1, t_2]$, melyre $\Theta_2(t) = (n+1)\pi$, azaz $\psi(t) = 0$.

9. Variációszámítás

9.1. A variációszámítás alapfeladata

A variációszámítás funkcionálok szélsőértékével foglalkozik. Az alapfeladatot először két példán mutatjuk be.

A brachisztochron-probléma. Adott egy függőleges síkban két pont (jelölje ezeket $(0,0)$ és (b,d)). Milyen alakú kényszerpályán jut el leghamarabb egy test az egyikből a másikba, ha csak a gravitáció hatását vesszük figyelembe? Fizikai megfontolások alapján ez a kérdés a következő matematikai feladathoz vezet. Adjuk meg azt az $x \in C^1[0,b]$ függvényt, melyre $x(0) = 0$, $x(b) = d$ és a

$$T(x) = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2(t)}{2gx(t) + 2v_0^2}}\mathrm{d}t$$

funkcionál értéke minimális.

A minimális forgásfelület problémája. Legyenek $a, b, c, d > 0$ számok. Keressük azt az $x \in C^1[a,b]$ függvényt, melyre $x(a) = c$, $x(b) = d$ és a gráfját megforgatva a vízszintes tengely körül a minimális felszínű forgásfelületet kapjuk, azaz amelyre az

$$F(x) = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\mathrm{d}t$$

funkcionál értéke minimális.

A fenti két példa alapján megfogalmazzuk a *legegyszerűbb variációs problémát.* $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ legyenek olyan számok, melyekre $a < b$. Legyen $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ egy $D(f)$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Az

$$\mathcal{M} = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = c,\ x(b) = d,\ R(id, x, \dot{x}) \subset D(f)\}$$

halmazt *megengedett függvényosztálynak* nevezik. A feladat az

$$I : \mathcal{M} \to \mathbf{R} \qquad I(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t$$

funkcionál szélsőértékeinek meghatározása.

A szélsőérték definiálásához természetesen be kell vezetni valamilyen topológiát az $\mathcal{M}$ halmazon. A variációszámításban a két leggyakrabban használt topológia a C^0 norma ($\|x\|_0 = \max|x|$), és a C^1 norma ($\|x\|_1 = \max|x| + \max|\dot{x}|$) által indukált topológia. Ennek megfelelően az alábbi két szélsőérték fogalmat használják.

34. Definíció. Az I funkcionálnak *relatív gyenge minimuma* van az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvényen, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in \mathcal{M}$, $\|x - x_0\|_1 < \delta$ esetén $I(x) \geq I(x_0)$. Az I funkcionálnak *relatív erős minimuma* van az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvényen, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in \mathcal{M}$, $\|x - x_0\|_0 < \delta$ esetén $I(x) \geq I(x_0)$. Hasonlóan definiálható a *relatív gyenge maximum* és a *relatív erős maximum.*

9.2. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

A valós számokon értelmezett függvények szélsőértékszámításához hasonlóan, a variációszámításban fellépő funkcionálok szélsőértékeinek létezésére is egyszerűbb szükséges, mint elégséges feltételt adni. Ebben a szakaszban megfogalmazzuk a két legegyszerűbb szükséges feltételt: az Euler-Lagrange differenciálegyenletet, és az Euler-Lagrange integro-differenciálegyenletet. Ezek a feltételek azon alapulnak, hogy a szélsőértékhelyeken a funkcionál minden iránymenti deriváltja nulla. Ebből levezetjük, hogy ha egy függvény szélsőértéke a funkcionálnak, akkor az a függvény kielégíti az Euler-Lagrange differenciálegyenletet, illetve az Euler-Lagrange integro-differenciálegyenletet. Felvetődhet a kérdés, hogy ezzel közelebb kerülünk-e a probléma megoldásához, azaz egyszerűbb-e megoldani az Euler-Lagrange differenciálegyenletet, illetve az Euler-Lagrange integro-differenciálegyenletet, mint megkeresni a funkcionál szélsőértékeit. A brachisztochron probléma és a minimális forgásfelület problémája esetében könnyen meg lehet oldani a kérdéses differenciálegyenleteket. Azonban igen jelentős a variációszámításban az inverz probléma is, amikor egy differenciálegyenlet megoldásának létezését úgy igazolják, hogy előállítanak egy funkcionált, melynek a kérdéses differenciálegyenlet az Euler-Lagrange differenciálegyenlete, és megmutatják valamilyen módon, hogy a funkcionálnak létezik szélsőértéke, ami tehát a differenciálegyenlet megoldása.

A továbbiakban gyakran fogjuk használni a következő jelöléseket:

$$C_0^1[a,b] = \{\eta \in C^1[a,b] : \eta(a) = \eta(b) = 0\},$$

$x \in C^1[a,b]$ esetén

$$\hat{x} = (id, x, \dot{x}) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$$

Az alábbi lemma az Euler-Lagrange differenciálegyenlet levezetéséhez szükséges.

24. Lemma. (Lagrange) *Ha $m \in C[a,b]$ olyan függvény, hogy minden $\eta \in C_0^1[a,b]$ esetén $\int_a^b m\eta = 0$, akkor $m \equiv 0$.*

51. Tétel. (Euler-Lagrange differenciálegyenlet) *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható. Ha az $x_0 \in C^2[a,b] \cap \mathcal{M}$ függvény az I funkcionál relatív gyenge szélsőértéke, akkor kielégíti a*

$$(\partial_3 f \circ \hat{x}_0)^{\cdot} = \partial_2 f \circ \hat{x}_0$$

Euler-Lagrange differenciálegyenletet. Azaz minden $t \in (a,b)$ esetén

$$\partial_{13} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + \partial_{23} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\dot{x}_0(t) + \partial_{33} f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\ddot{x}_0(t) = \partial_2 f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$$

Az alábbi lemma az Euler-Lagrange integro-differenciálegyenlet levezetéséhez szükséges.

25. Lemma. (Du Bois Reymond) *Ha $h \in C[a,b]$ olyan függvény, hogy minden $\eta \in C_0^1[a,b]$ esetén $\int_a^b h\dot{\eta} = 0$, akkor h konstans függvény.*

52. Tétel. (Euler-Lagrange integro-differenciálegyenlet) *Legyen f olyan folytonos függvény, melynek $\partial_2 f$ és $\partial_3 f$ parciális deriváltjai is folytonosak. Ha az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvény az I funkcionál relatív gyenge szélsőértéke, akkor van olyan $k \in \mathbf{R}$, mellyel kielégíti a*

$$\partial_3 f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = \int_a^t \partial_2 f(s, x_0(s), \dot{x}_0(s))\mathrm{d}s + k \quad t \in (a,b)$$

Euler-Lagrange integro-differenciálegyenletet.

35. Definíció. A

$$\delta I_{x_0} : C_0^1[a,b] \to \mathbf{R}, \qquad \delta I_{x_0}(\eta) = \int_a^b \partial_2 f(\hat{x}_0(t))\eta(t) + \partial_3 f(\hat{x}_0(t))\dot{\eta}(t)\mathrm{d}t$$

funkcionált az I funkcionál $x_0 \in \mathcal{M}$ függvényre vonatkozó *első variációjának* nevezik. A $\delta I_{x_0} \equiv 0$ egyenletet kielégítő x_0 függvényt, pedig *stacionárius függvénynek* hívják.

17. Megjegyzés. A δI_{x_0} funkcionál ugyanolyan típusú, mint az I. Ugyanis az adott számok $a, b, 0, 0$, az integrandusban álló függvény

$$\Lambda : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \quad \Lambda(t,p,q) = \partial_2 f(\hat{x}_0(t))p + \partial_3 f(\hat{x}_0(t))q,$$

a megengedett függvényosztály $C_0^1[a,b]$. Ekkor

$$\delta I_{x_0}(\eta) = \int_a^b \Lambda(t, \eta(t), \dot{\eta}(t))\mathrm{d}t.$$

Nyilvánvaló az alábbi:

27. Állítás. *Az x_0 pontosan akkor stacionárius függvény, ha kielégíti az Euler-Lagrange integro-differenciálegyenletet.*

9.3. A szélsőérték létezésének elégséges feltétele

A valós számokon értelmezett függvények szélsőértékszámításához hasonlóan, a variációszámításban fellépő funkcionálok szélsőértékei létezésének elégséges feltétele, a második deriváltjukkal (második variációjukkal) van kapcsolatban. Ezért az Euler-Lagrange differenciálegyenlet levezetésénél használt $\phi(\varepsilon) = I(x_0 + \varepsilon\eta)$ függvény második deriváltja fontos szerepet fog játszani. Erre azt kapjuk, hogy

$$\phi''(0) = \int_a^b p(t)\eta^2(t) + 2q(t)\eta(t)\dot{\eta}(t) + r(t)\dot{\eta}^2(t)\mathrm{d}t,$$

ahol

$$p(t) = \partial_{22}f(\hat{x}_0(t)) \qquad q(t) = \partial_{23}f(\hat{x}_0(t)) \qquad r(t) = \partial_{33}f(\hat{x}_0(t)).$$

Ennek alapján definiáljuk a funkcionál második variációját.

36. Definíció. A

$$\delta^2 I_{x_0} : C_0^1[a,b] \to \mathbf{R}, \qquad \delta^2 I_{x_0}(\eta) = \int_a^b p(t)\eta^2(t) + 2q(t)\eta(t)\dot{\eta}(t) + r(t)\dot{\eta}^2(t)\mathrm{d}t$$

funkcionált az I funkcionál $x_0 \in \mathcal{M}$ függvényre vonatkozó *második variációjának* nevezik.

18. Megjegyzés. A $\delta^2 I_{x_0}$ funkcionál is ugyanolyan típusú, mint az I. Ugyanis az adott számok $a, b, 0, 0$, az integrandusban álló függvény

$$\Omega : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \qquad \Omega(t,x,y) = p(t)x^2 + 2q(t)xy + r(t)y^2,$$

a megengedett függvényosztály $C_0^1[a,b]$. Ekkor

$$\delta^2 I_{x_0}(\eta) = \int_a^b \Omega(t, \eta(t), \dot{\eta}(t))\mathrm{d}t.$$

A második variáció jellemzi azt is, hogy egy szélsőérték minimum, vagy maximum:

53. Tétel. *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható. Ha az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvény az I funkcionál relatív gyenge minimuma, akkor $\delta^2 I_{x_0} \geq 0$.*

54. Tétel. *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható. Ha az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvényre $\delta^2 I_{x_0} \geq 0$, akkor $r \geq 0$.*

8. Következmény. (Legendre feltétel) *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható. Ha az $x_0 \in \mathcal{M}$ függvény az I funkcionál relatív gyenge minimuma, akkor $r \geq 0$.*

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele az ún. *Jacobi feltétellel* van kapcsolatban. Ehhez vezetjük be a Jacobi-féle differenciálegyenletet.

37. Definíció. Az Ω függvénnyel meghatározott Euler-Lagrange differenciálegyenletet az f függvény x_0-ra vonatkozó *Jacobi-féle differenciálegyenletének* nevezik.

28. Állítás. *A Jacobi-féle differenciálegyenlet:*

$$r\ddot{\eta} + \dot{r}\dot{\eta} + (\dot{q} - p)\eta = 0 \tag{32}$$

(η az ismeretlen függvény.)

29. Állítás. *Ha f háromszor folytonosan differenciálható, x_0 kétszer folytonosan differenciálható, és $r > 0$, akkor a (32) differenciálegyenletnek bármely kezdeti feltétel mellet létezik egyetlen megoldása.*

Jelölje az $\eta(a) = 0$, $\dot{\eta}(a) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást Δ_{x_0}.

38. Definíció. Az x_0 függvény kielégíti a *Jacobi feltételt*, ha a Δ_{x_0} függvénynek nincs gyöke az (a, b) intervallumban. Az x_0 függvény kielégíti az *erős Jacobi feltételt*, ha a Δ_{x_0} függvénynek nincs gyöke az $(a, b]$ intervallumban.

55. Tétel. *Legyen f háromszor folytonosan differenciálható, x_0 kétszer folytonosan differenciálható, és $r > 0$. Az x_0 függvény pontosan akkor elégíti ki a Jacobi feltételt, ha $\delta^2 I_{x_0} \geq 0$.*

56. Tétel. *Legyen f háromszor folytonosan differenciálható, x_0 kétszer folytonosan differenciálható, és $r > 0$. Ha $\delta I_{x_0} \equiv 0$, és az x_0 függvény kielégíti az erős Jacobi feltételt, akkor x_0 az I funkcionál relatív gyenge minimuma.*